Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 9 de octubre del 2022

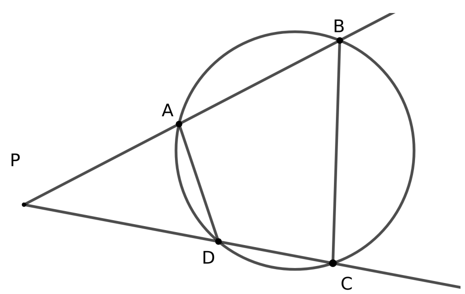
Potencia de punto

Alfredo Hernández Estrada

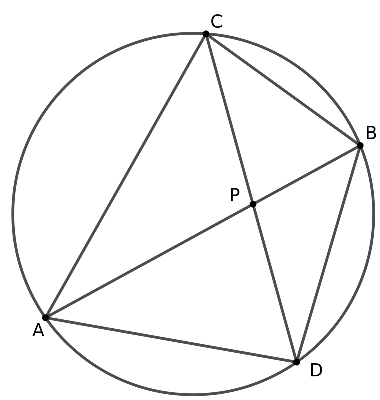
1. Introducción

Como vimos en el tema sobre cuadriláteros cíclicos, en estos podemos encontrar una gran cantidad de igualdades de ángulos y lo que es mas, semejanzas de triángulos. Si bien el nombre del tema que trataremos puede parecer un tanto extraño veremos que este no se reduce mas que a darle nombre a un conjunto de semejanzas encontradas en la figura descrita a continuación.

Consideremos una circunferencia y un punto P cualquiera que no esta en la circunferencia, y sean A, B, C y D puntos sobre una circunferencia tales que P es el punto de intersección de las rectas AB y CD, esto nos deja con alguna de las siguientes dos configuraciones.



(a) P en el interior



(b) P en el exterior

En ambos casos, podemos notar, usando el ciclico para igualar angulos, que

$$\angle PAD = \angle BAD = \angle BCD = \angle BDP = 180° - \angle PCB,$$

y análogamente

$$\angle ADP = \angle ADC = \angle ABC = \angle PBC = \angle 180° - \angle CBP$$

con lo que obtenemos que

$$\triangle APD \sim \triangle CPB.$$

De la semejanza anterior,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

o lo que es igual

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Todo esto es precisamente lo que definiremos como potencia de un punto, en este caso estamos obteniendo la potencia desde el punto P. Para facilitar el uso de este concepto podemos pensar simplemente que en ambos casos, P fuera y dentro de la circunferencia, el valor de $PA \cdot PB$ no cambia, pues no depende de la elección de los puntos A y B. Esto pues basta fijar C y D y para cualquier elección de A y B, siempre se va a cumplir la igualdad.

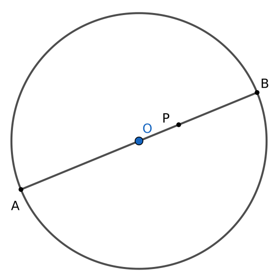
En particular, podemos pensar que la linea AB pasa por O, el centro de la circunferencia, en cuyo caso si P se encuentra dentro de la circunferencia, obtenemos que la potencia desde P al circulo es igual a

$$AP \cdot PB = (r - OP)(r + OP) = r^2 - OP^2,$$

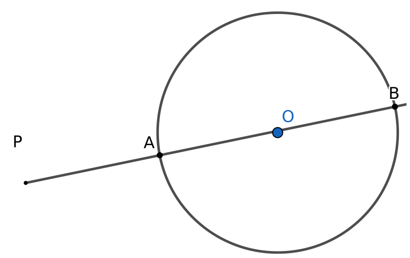
donde r es el radio del circulo, y por otro lado si P se encuentr fuera del circulo entonces la potencia es igual a

$$AP \cdot PB = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2,$$

lo cual se aprecia a continuación



(c) P en el interior



(d) P en el exterior

Todo lo anterior nos define el siguiente teorema, donde denotaremos por $Pow_\omega(P)$ a la respectiva potencia del punto P al circulo ω.

Teorema 1.1 (Potencia de un punto) *Considera un circulo ω y un punto arbitrario P.*

1. *El valor de $Pow_\omega(P)$ es positivo, zero o negativo dependiendo de si P esta fura, sobre o en el interior de ω.*
2. *SI l es una recta por P que intersecta a ω en dos puntos distintos X y Y, entonces*

$$PX \cdot PY = |Pow_w(P)|.$$

3. *Si P es un punto fuera de ω y PA es la tangente de P a ω entonces*

$$PA^2 = Pow_\omega(P).$$

Los primeros incisos se reducen directo de lo probado anteriormente, la demostración del tercer inciso por otra parte se deja como ejercicio al lector.

2. Resultados importantes

Si bien puede pensarse simplemente como el uso de semejanzas, el uso de la potencia de un punto directamente puede ahorrar pasos extra y ayudar a el desarrollo de la intuición en geometría. Además el uso de la potencia de un punto combinado con el uso de resultados enteramente de potencia puede facilitar encontrar propiedades antes desconocidas.

Una pregunta común tras probar un resultado es preguntarse si su reciproco es o no verdadero, a continuación mostraremos que el reciproco del resultado *Potencia de un punto* también es verdadero.

Teorema 2.1 *Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos en el plano y sea P el punto de intersección de las rectas AB y CD, suponemos que P se encuentra o no, en la respectiva intersección de los segmentos. Si se cumple que*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

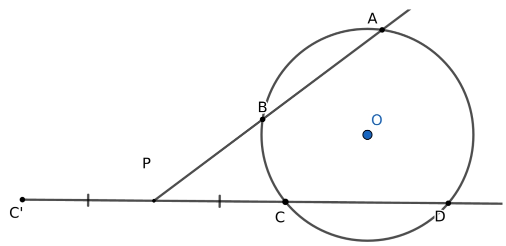
entonces A, B, C y D son conciclicos.

La demostración de este teorema es directa si a partir del producto obtenemos que

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

y llegar a las respectivas semejanzas de triángulos por el criterio lal, de nuevo se dejan los detalles al lector.

La razón de considerar solo considerar los casos en los que P se encuentra en ambos segmentos AB y CD, y el caso en el que no esta e ninguno de los dos se debe a que se puede caer en el engaño de que los puntos sean conciclicos pero esto puede no ser cierto, como de muestra en la siguiente imagen



En este caso el punto C' cumple la igualdad

$$PA \cdot PB = PC' \cdot PD,$$

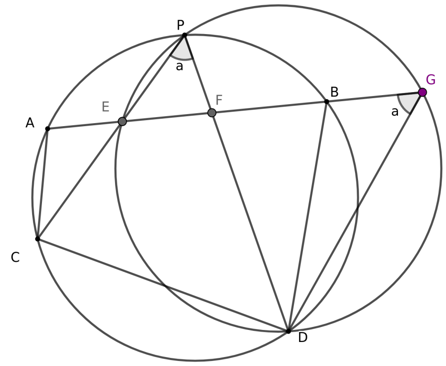
pero claramente C' no es conciclico con A, B, y D.

Otro resultado útil, y además una forma de ver la utilidad del uso de la potencia de un punto, es el siguiente lema.

Lema de Haruki. Sean AB y CD dos cuerdas de una circunferencia Γ_1 que no se intersectan considera P un punto variable del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a C ni a D. Sea E la intersección de PC y AB y F la intersección de PD y AB, entonces el numero

$$\frac{AE \cdot FB}{EF},$$

es independiente de la posición de P en el arco $\widehat{BA}$.



Demostración:

Sea Γ_2 el circuncirculo del triangulo $\triangle PED$ y sea G el punto de intersección de Γ_2 con la recta AB. Sabemos que como el $PEDG$ es un cuadriatero ciclico se debe cumplir que

$$\angle EPD = \angle EGD,$$

pero $\angle EPD = \angle CPD$, que es de echo $\frac{\widehat{CD}}{2}$. Lo anterior nos dice que el valor del ángulo $\angle EGD$ es independiente de la elección de P y por lo tanto el punto G es independiente de la elección del punto P, por lo que este no cambia.

Tomemos entonces la potencia de F a Γ_1, de donde sabemos que

$$AF \cdot FB = PF \cdot FD,$$

y de la potencia de F a Γ_2 sabemos que

$$EF \cdot FG = PF \cdot FD,$$

de donde obtenemos la igualdad

$$AF \cdot FB = EF \cdot FG,$$

y si escrbimos $AF = AE + EF$ tenemos que

$$AE \cdot FB + EF \cdot FB = EF \cdot FG,$$

y por lo tanto

$$\frac{AE \cdot FB}{EF} = FG - FB = BG,$$

pero como mencionamos antes, el punto G es independiente de la elección de P, y además el punto B tambien esta fijo, por lo que el valor de BG es constante, de sigue que el valor de $\frac{AE \cdot FB}{EF}$ es también constante. ■

3. Problemas

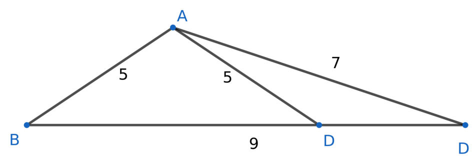
1. Dos segmentos PA y BC se intersectan en P, si

$$PA = PB \cdot PC,$$

muestra que PA es tangente al circuncirculo de $\triangle ABC$ en A.

2. La circunferencia C esta inscrita en el triangulo $\triangle ABC$ y es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demuestra que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$.

3. En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$, encuentra $\frac{BD}{DC}$.



4. Sea BD la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ del triangulo $\triangle ABC$. El circuncirculo del $\triangle BDC$ intersecta a AB en E y el circuncirculo del $\triangle ABD$ intersecta a BC en F. Demuestra que $AE = CF$.

5. En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.