Potencia de un punto y ejes radicales

Entrenamiento #1 para 4ª etapa
17-19 de junio de 2016
Por: Clemente ft. Lulú

Resumen

Hemos hablado en el pasado de cuadriláteros cíclicos y sus propiedades; de cómo saber si un cuadrilátero es cíclico y de por qué nos sirven. Dentro de esas propiedades hablamos de *potencias*, pero no lo vimos muy a fondo. Ahora que estamos empezando con los entranamientos para el concurso estatal, es importante que nos adentremos en este tema que, aunque quizá un poco denso, es de gran utilidad.

1. Instrucciones previas

Algunos de ustedes han estado entrenando desde la etapa pasada. Algunos otros afortunados han podido entrenar desde hace al menos un año. Sin embargo, es probable que haya quienes no han recibido entrenamiento y que, por lo tanto, desconozcan la terminología o funcionamiento de las potencias; o peor aún, de los cíclicos. Si tu caso es como este último, asegúrate de pedir a tus entrenadores que te expliquen el tema y que te proporcionen la lista que se utilizó en esa sesión.

2. Definiciones y blablablá

Breve recordatorio por si andan muy fríos. Un cuadriláteros cíclico se define como una figura de cuatro lados (cuadrilátero) cuyos cuatro vértices se encuentran en una misma circunferencia. Una vez que sabes que un cuadrilátero cíclico, sabes que cumple con las siguientes propiedades (sí, todas):

- Ángulos opuestos suman 180°
- Moñitos
- **Potencias**
- Ptolomeo
- Brahmagupta

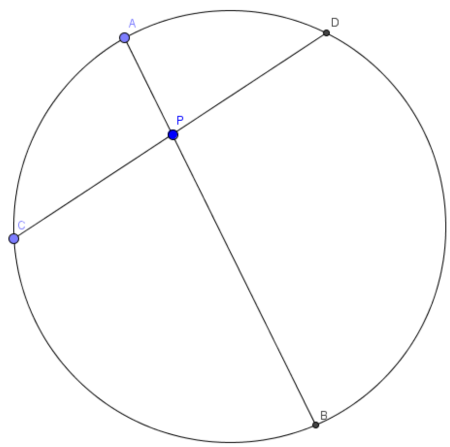
2.1. ¿Pero y las potencias?

Habrán de suponer (o recordar) que el concepto de potencia en Geometría no tiene mucho que ver con lo que conocemos en el álgebra. De hecho, en Geo, cuando se habla de potencias, nos referimos a *la potencia de un punto respecto a una circunferencia*. "¿Y eso con qué se come o cómo?", probablemente dirás. Para eso, y por cuestiones estéticas, hemos de comenzar un nuevo párrafo.

Si pensamos en una circunferencia y un punto P (donde sea) en el plano y trazamos una secante que pase por P, veremos que P define dos segmentos muy importantes: AP y BP, donde A y B son los puntos donde la circunferencia interseca a la secante. Sucede que la potencia de P es el producto de AP y BP. Y también sucede que ese producto es el mismo para todas las líneas que pasen por P. Claro que todos entendemos que el punto puede estar dentro o fuera de la circunferencia y por ello, aunque funcionen de una manera muy similar, se manejan dos tipos de potencias.

2.2. Potencia Interna

Cuando P se encuentra dentro de la circunferencia, su potencia es el producto de los segmentos en los que se divide la cuerda. De nuevo, ese producto es el mismo para cualquier cuerda que pase por P. Absolutamente cualquiera, hasta los diámetros (sí, técnicamente son cuerdas). Veamos un dibujito.



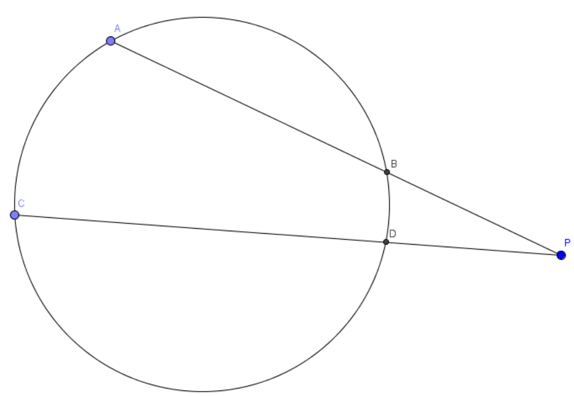
Para un punto P, se trazan dos cuerdas AB y CD que pasen por él. Sin importar qué cuerdas sean sucede que

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

Y como los puntos A, D, B y C están en una circunferencia, es claro que se forma un cuadrilátero cíclico. Este resultado es un si y sólo si. Es decir: un cuadrilátero es cíclico sí y sólo si sus diagonales cumplen con la ecuación antes mencionada. Por supuesto, esto te toca desmotrarlo a ti. ¡Ánimo!

2.3. Potencia Externa

Cuando P se encuentra fuera de la circunferencia, su potencia es el producto de los segmentos hacia la intersección con la circunferencia. De nuevo, cualquier secante que pase por P tendrá el mismo producto en dichos segmentos. De nuevo el dibujito ilustrativo.



Para un punto P se trazan dos secantes que cortan a la circunferencia en los puntos A, B, C y D, como se ve en la figura. Sin importar qué secantes sean, sucede que

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

De nuevo, es fácil ver que A, B, D y C forman un cuadrilátero cíclico. Esto también es un si y sólo si que tendrás que demostrar: un cuadrilátero es cíclico si y sólo si las prolongaciones de sus lados cumplen con la ecuación antes mencionada. ¡A darle!

2.4. Los ejes radicales

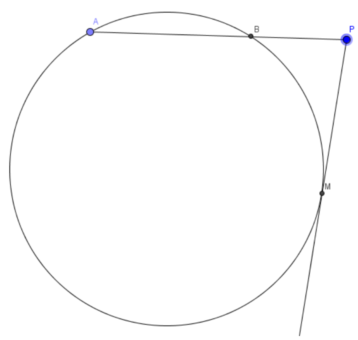
¿Te imaginas si un mismo punto P tiene la misma potencia respecto a dos circunferencias distintas? Para cualquier par de circunferencias existe una línea tal que sus puntos cumplen esa propiedad. Esa línea se llama eje radical. Su definición formal sería algo así como "lugar geométrico de todos los puntos tales que su potencia respecto a dos circunferencias es la misma". ¿Dónde está o cómo encuentras el eje radical para un par de circunferencias? Lo veremos en la sección de problemas. Pero es importante que consideres todos los siguientes casos para tu análisis:

- Dos circunferencias que no se tocan, ni se contienen
- Dos circunferencias tangentes externamente
- Dos circunferencias que se intersecan en dos puntos
- Dos circunferencias tangentes internamente
- Dos circunferencias que no se tocan, una contenida dentro de la otra

  Claro, los ejes radicales tienen varias propiedades interesantes que veremos más adelante.

3. Propiedades

1. En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersectan la circunferencia en los puntos A, B y M. Demuestra que $PM^2 = PA \cdot PB$.



2. La potencia de un punto depende sólo de su distancia hacia el centro de la circunferencia y del radio de ésta. Para potencias internas eso sería:
$$R^2 - PO^2$$

3. El equivalente para potencias externas es:
$$PO^2 - R^2$$

4. Dadas tres circunferencias con centros no colineales, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) concurren.

5. Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

6. Demuestra que si dos circunferencias tienen una cuerda común, ese será su eje radical.

7. Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la línea de centros.

4. Agregados culturales

1. Al punto de intersección de los tres ejes radicales de tres circunferencias se le llama "centro radical".

2. A la línea que une los centros de dos circunferencias se llama "línea de centros".

3. Por el cambio de etapa, ya no habrá datos curiosos de vacas.

4. El año pasado se hizo, por maldad hacia Lulú, de cucarachas. Pero ya no más.

5. La especie más chica de ardilla es la pigmea africana y mide un máximo de diez centímetros. La especie más grande es la gigante de la India.

6. Al igual que las vacas, las ardillas tuvieron en sus primeros agregados algo que ver con la India.

7. Hasta el año pasado, se tenía por costumbre imprimir la sección completa de potencias del Shuyrigin.

5. Problemas

1. Por un punto en el eje radical de dos circunferencias, dibujamos secantes a cada una de las dos circunferencias. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos determinan un cuadrilátero cíclico.

2. Sea BD la bisectriz del ángulo $\measuredangle B$ del triángulo $\triangle ABC$. El circuncírculo del triángulo $\triangle BDC$ intersecta AB en E y el circuncírculo del triángulo $\triangle ABD$ intersecta BC en F. Demuestra que $AE = CF$.

3. Demuestra que si una circunferencia intersecta los lados BC, CA, AB del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos $D, D'; E, E'; F, F'$; respectivamente, entonces

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1$$

4. En el $\triangle ABC$ se tiene un punto P en su interior. Supón que BC es tangente a los circuncírculos de los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle ACP$. Prueba que AP corta a BC en su punto medio.

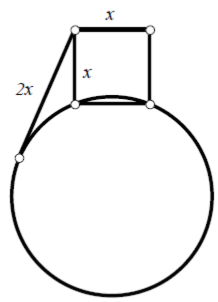
5. **(OMMBC, 2016, 3ra, P2-N1)** Sea $\triangle ABC$ un triangulo isosceles (con $AB = AC$) inscrito en una circunferencia. Se toman un par de puntos P y Q sobre AB y AC, respectivamente, tal que PQ es paralela a BC. Si PQ corta la circunferencia en D y E, encuentra el valor de $\frac{DP}{EQ}$.

6. Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca sus lados en los puntos A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual intersecta a la circunferencia en el punto C. El segmento OC intersecta la circunferencia en el punto E. Las líneas AE y OB se intersectan en el punto K. Demuestra que $OK = KB$.

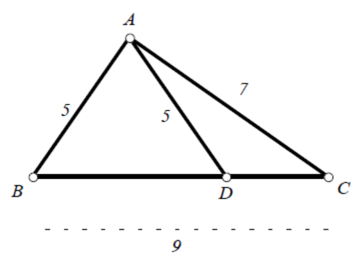
7. La circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB es los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta la circunferencia en un segundo punto Q. Demuestra que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$.

8. Una línea paralela al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ corta a AB en F y a AC en E. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del triángulo $\triangle ABC$ bajada desde el vértice A.

9. En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.



10. En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.



11. Sea $\triangle ABC$ un triángulo arbitrario y sea P un punto en el plano del triángulo. Las líneas AP, BP y CP intersectan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Consideremos dos circunferencias, una que pasa por A y A_1 y otra que pasa por B y B_1. Sean D y D_1 los extremos de la cuerda común de estas circunferencias. Demuestra que C, C_1, D y D_1 se hallan en una misma circunferencia.

12. Sea C un punto sobre un semicírculo de diámetro AB y sea D el punto medio del arco $\widehat{AC}$. Sea E la proyección del punto D sobre la línea BC y sea F la intersección de la línea AE con el semicírculo. Demuestra que BF bisecta al segmento DE.

13. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en un semicírculo Γ de diámetro AB. Las líneas AC y BD se intersectan en E y las líneas AD y BC en F. La línea EF intersecta al semicírculo Γ en G y a la línea AB en H. Demuestra que E es el punto medio del segmento GH si y sólo si G es el punto medio del segmento FH.

14. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del $\angle ACD$ toca a BA en K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, prueba que $\angle BKC = \angle CDB$.

15. En una circunferencia está trazado el diámetro AB y la cuerda CD perpendicular a AB. Una circunferencia arbitraria es tangente a la cuerda CD y al arco $\widehat{BD}$. Demuestra que la tangente a esta circunferencia trazada a partir del punto A es igual a AC.
16. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Los puntos M y N son tomados sobre los lados AB y AC, respectivamente. Los círculos con diámetros BN y CM se intersectan en los puntos P y Q. Demuestra que P, Q y el ortocentro H, son colineales.
17. Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos sobre una línea (en ese orden). Los círculos con diámetros AC y BD se intersectan en X y Y. La línea XY intersecta BC en Z. Sea P un punto sobre la línea XY , distinto de Z. La línea CP intersecta el círculo con diámetro AC en C y M, y la línea BP intersecta el círculo con diámetro BD en B y N. Demuestra que las líneas AM, DN y XY son concurrentes.
18. Sea I el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$. Esta circunferencia es tangente a los lados BC, CA y AB del triángulo en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta paralela a MK que pasa por el punto B intersecta a las rectas LM y LK en los puntos R y S, respectivamente. Demuestra que el ángulo $\measuredangle RIS$ es agudo.
19. En el triángulo $\triangle ABC$ los puntos P, Q, R están sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente y las líneas AP, BQ, CR son concurrentes. Demostrar que el centro radical de las circunferencias que tienen estas líneas como diámetros es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$.
20. Encuentra el centro radical de las circunferencias que tienen como diámetros los segmentos BC, BH, CH, donde H es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$.
21. **(Anónimo, 2016)** Sea AB una cuerda y M su punto medio, sea CD otra cuerda que pasa por M. Se traza el semicírculo de diámetro CD, y sea S el punto en ese semicírculo que se interseca con la perpendicular a CD desde M. Encuentra el valor de $\measuredangle ASB$.

6. Jarcors

1. **(Teorema de Euler)** Dado un punto P, en el plano de un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. El triángulo $\triangle DEF$ es denominado el triángulo pedal del punto P. Demuestra que el área del triángulo $\triangle DEF$ se puede calcular como
$$|DEF| = \frac{(R^2 - d^2)|ABC|}{4R^2}$$
donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ y d es la distancia del punto P al circuncentro de $\triangle ABC$.
2. **(OMM 2001, P3)** En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M, corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD, de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Demuestra que $AT = RC$.
3. **(OMMBC, 2008, 5ta, P3)** Sea AB el diametro de una circunferencia. Si las cuerdas AP y BQ se intersecan en el interior de la circunferencia en T, demuestra que $AT \cdot AP + BT \cdot BQ$ es constante.
4. **(Fórmula de Euler)** Sean O el circuncentro, R el circunradio, I el incentro y r el inradio del triángulo $\triangle ABC$, entonces $OI^2 = R^2 - 2Rr$.
5. Demuestra que las 3 mediatrices del $\triangle ABC$ concurren en un punto O que equidista de los 3 vértices.
6. Demuestra que las 3 alturas del $\triangle ABC$ concurren en un punto H,