

Potencia y eje radical

Carmela Acevedo

Potencia

Definición:

La **potencia** de un punto P respecto a una circunferencia Γ es el producto $PA \cdot PB$, donde A y B son los puntos de corte de una recta secante a Γ que pasa por P .

Teorema

La potencia es independiente de la secante escogida. Es decir, si C y D son puntos de corte de otra secante (Fig. 1) entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

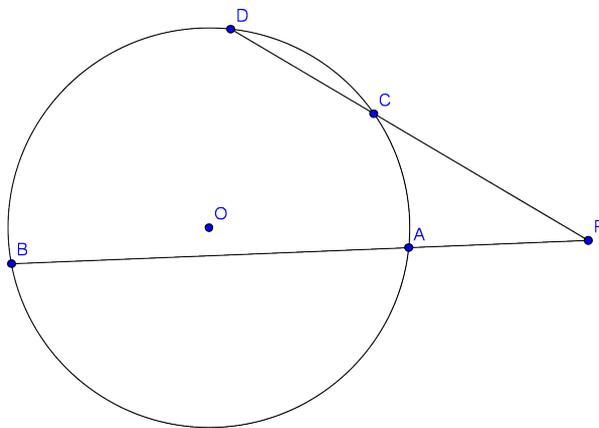


Figura 1:

Demostración

Considere los puntos A , B , C y D , estos están sobre la circunferencia Γ y por lo tanto forman un cuadrilátero concíclico, por lo que los ángulos opuestos de éste suman 180° , así que tenemos $\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ$ y $\angle DBA + \angle ACD = 180^\circ$. Ahora, por ser ángulos suplementarios tenemos que: $\angle PAC + \angle BAC = 180^\circ$ y $\angle PCA + \angle ACD = 180^\circ$. Así que $\angle BDC = \angle PAC$ y $\angle DBA = \angle PCA$.

Por tener dos ángulos iguales tenemos que los triángulos $\triangle PBD$ y $\triangle PCA$ son semejantes y entonces $\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA} = \frac{BD}{CA}$, tomando las dos primeras igualdades y despejando obtenemos: $PB \cdot PA = PD \cdot PC$ que es lo que buscábamos.

Si por ejemplo los dos puntos A y B son el mismo entonces se tendría que la secante PA es realmente una recta tangente a la circunferencia. En este caso la potencia de este punto también se puede expresar como PT^2 tomando a T como el punto de tangencia.

Demostración:

Tomemos a los puntos A y B como diámetro de la circunferencia para obtener que el ángulo $\angle BTA = 90^\circ$ (Fig.2) porque es un ángulo inscrito al diámetro entonces si llamamos al ángulo $\angle TBA = \alpha$ entonces tenemos que el ángulo $\angle PAT = 90^\circ + \alpha$. Ahora, el ángulo $\angle PTA = \alpha$ por ser un ángulo inscrito en el arco menor TP . Así que tenemos que los triángulos $\triangle PTA$ y $\triangle PBT$ son semejantes y $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$ de donde se obtiene que: $PT^2 = PA \cdot PB$

Ejercicio:

Completar la demostración del Teorema 1 en el caso en que el punto P sea interior a la circunferencia. (Fig. 3)

Teorema:

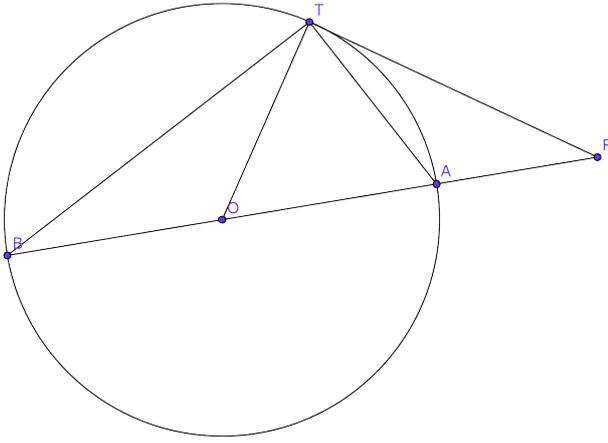


Figura 2: Fig.2

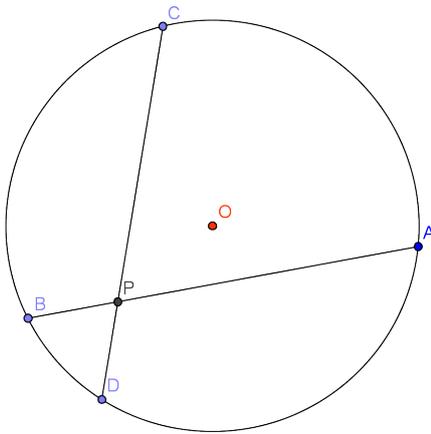


Figura 3: Fig 3

La potencia de un punto P respecto a una circunferencia es igual a $|d^2 - r^2|$, donde d es la distancia desde el punto P hasta el centro de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia.

Demostración:

Tenemos que la potencia del punto P con respecto a la circunferencia la podemos escribir como $PA \cdot PB$ donde A, B son puntos de corte de una recta que pasa por P y la circunferencia. Ahora, tomemos estos A y B como diámetro como en la Fig. 2. Así que ahora tenemos que $PA = d + r$ y $PB = d - r$ por lo que podemos reescribir la potencia del punto P como $PA \cdot PB = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2$. El valor absoluto de la definición se halla al considerar la potencia de un punto que esté dentro del círculo ya que en ese caso el resultado sería negativo. Esto se deja como ejercicio.

Teorema: Sean O e I el circuncentro e incentro, respectivamente, de un triángulo ABC con un circunradio R e inradio r ; sea d la distancia OI . Entonces:

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

La figura muestra la bisectriz interna del ángulo $\angle A$ extendida para encontrarse con el circuncírculo en L , el punto medio del arco BC que no contiene a A . LM es el diámetro perpendicular a BC . Escribamos, por conveniencia, $\alpha = \frac{1}{2}A$ y $\beta = \frac{1}{2}B$, notamos que,

$$\angle BML = \angle BAL = \alpha, \text{ y } \angle LBC = \angle LAC = \alpha.$$

Considerando que el ángulo exterior de $\triangle ABI$ en I es

$$\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI,$$

$\triangle LBI$ es isósceles: $LI = LB$. Entonces

$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= LI \cdot IA \\ &= LB \cdot IA \\ &= LM \frac{LB/LM}{IY/IA} IY \\ &= LM \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} IY \end{aligned}$$

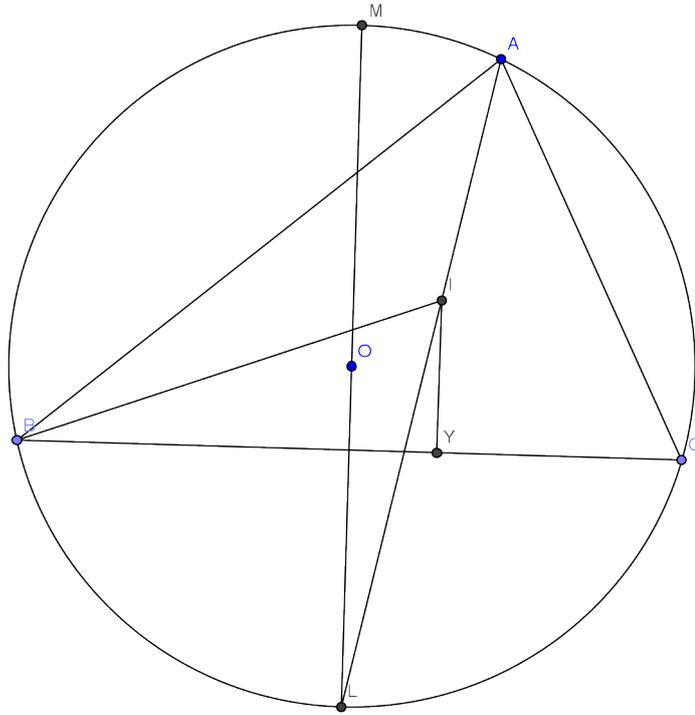


Figura 4: Fig 4

$$= LM \cdot IY$$

$$R^2 - d^2 = 2Rr$$

El siguiente problema (debido a N. Vasil'ev) apareció en el Russian Kvant (M26, Marzo-Abril, 1991, 30) y fue popularizado por R. Honsberger en su libro *Mathematical Chestnuts from Around the World* y utiliza la potencia de un punto.

Ejercicio

El barco 1 y barco 2 viajan a velocidades constantes, no necesariamente iguales, y parten al mismo tiempo de los muelles A y C , respectivamente en la orilla de un lago circular. Si los barcos viajan directamente a los puertos D y B entonces chocan. Prueba que si, en cambio, el barco 1 viaja directo al muelle B y el barco 2 al muelle D , entonces llegan simultáneamente.

Solución

Primero, sean v_1 y v_2 las velocidades de los barcos. El hecho de que colisionen significa que llegan a un punto P simultáneamente. Entonces el tiempo que transcurre mientras el barco 1 recorre AP y el barco 2 recorre CP es el mismo $t = AP/v_1 = CP/v_2$ y entonces tenemos que $AP/CP = v_1/v_2$. Ahora como los triángulos APB y CPD son semejantes entonces: $AP/CP = AB/CD = v_1/v_2$ ó $AB/v_1 = CD/v_2 = t_1$ lo cuál significa que si el barco 1 se dirige a B y el barco 2 se dirige a D entonces llegan al mismo tiempo.

Problemas:

1. Qué potencia tiene cualquier punto que esté sobre la circunferencia?
2. Demostrar que la medida de dos tangentes a un mismo círculo desde un mismo punto P es la misma.
3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y E la intersección de las diagonales. Probar que $\frac{AE}{CE} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$
3. Si PT y PU son tangentes desde P a dos círculos concéntricos, con T en el más pequeño, y el segmento PT interseca al otro círculo en Q , entonces $PT^2 - PU^2 = QT^2$
4. Desde un punto externo P se trazan dos tangentes a un círculo y lo intersecan en A y B . Una tercera tangente interseca al círculo en T y a PA y PB en Q y R respectivamente, encuentra el perímetro del triángulo PQR .
5. Un cuadrado $ABCD$ de lado 10 tiene un círculo inscrito en él. Sea M el punto medio de AB . Encuentre la longitud de la parte del segmento MC que se encuentra fuera del círculo.

Eje Radical

El **eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas

Teorema:

El eje radical de dos circunferencias no concéntricas es una recta perpendicular a la línea que une los dos centros.

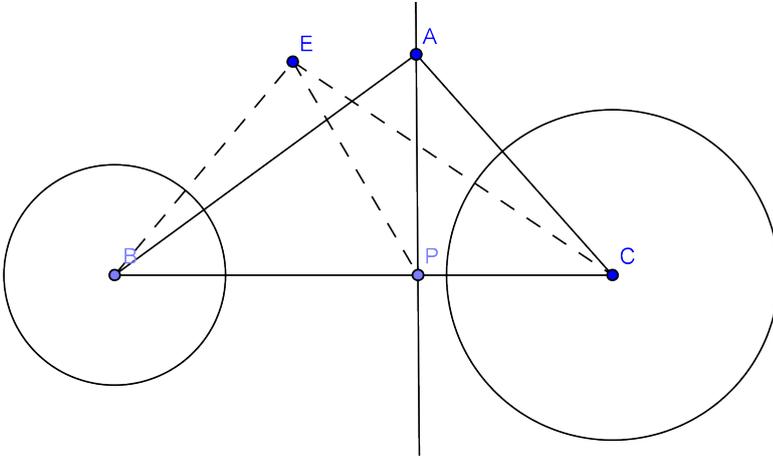


Figura 5: Fig 5

Demostración:

Sean B y C los centros de las circunferencias y r_1 y r_2 sus respectivos radios. Sea P un punto en la recta BC y sean $x = BP$ y $a = BC$. P tiene igual potencia respecto a ambas circunferencias si y sólo si

$$x^2 - r_1^2 = (a - x)^2 - r_2^2$$

, es decir $x^2 - r_1^2 = a^2 - 2ax + x^2 - r_2^2$, y simplificando

$$x = (a^2 + r_1^2 - r_2^2)/(2a).$$

Esto muestra que hay un único punto P en la recta BC con igual potencia respecto a ambas circunferencias.

Sea e la recta perpendicular a la recta BC por P . Probaremos que e es el eje radical buscado.

Primero, si A es un punto cualquiera sobre e , por Pitágoras tenemos:

$$\begin{aligned} PB^2 + PA^2 &= BA^2 \text{ y } PC^2 + PA^2 = CA^2 \\ \Rightarrow PA^2 &= BA^2 - PB^2 \text{ y } PA^2 = CA^2 - PC^2 \\ \Rightarrow BA^2 - PB^2 &= CA^2 - PC^2 \\ \Rightarrow BA^2 - CA^2 &= PB^2 - PC^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Ahora, por ser la potencia de P la misma con respecto a ambas circunferencias tenemos que

$$\begin{aligned} PB^2 - r_1^2 &= PC^2 - r_2^2 \\ \Rightarrow PB^2 - PC^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\ \Rightarrow \text{por (1) } BA^2 - CA^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\ \Rightarrow BA^2 - r_1^2 &= CA^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

lo cual significa que la potencia del punto A con respecto a ambas circunferencias es la misma.

Sea ahora E es un punto fuera de la recta e y asumamos que su potencia con respecto a ambas circunferencias es la misma.

Si por ejemplo E está del mismo lado de e que B , por ser $\angle BPE$ agudo y $\angle CPE$ obtuso se cumplen las siguientes desigualdades:

$$PB^2 + PE^2 > BE^2 \text{ y } EC^2 > PE^2 + PC^2$$

Sumando ambas desigualdades y cancelando PE^2 obtenemos

$$PB^2 + EC^2 > BE^2 + PC^2 \quad (2)$$

Ahora, como E y P tienen la misma potencia con respecto a ambas circunferencias obtenemos:

$$\begin{aligned} PB^2 - r_1^2 &= PC^2 - r_2^2 \text{ y } BE^2 - r_1^2 = EC^2 - r_2^2 \\ \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 &= PB^2 - PC^2 \text{ y } r_1^2 - r_2^2 = BE^2 - EC^2 \\ \Rightarrow PB^2 + EC^2 &= BE^2 + PC^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Considerando (2) y (3) llegamos a una contradicción, por lo cual el punto E o cualquier otro punto fuera de la recta e no puede tener la misma potencia respecto a ambas circunferencias. Se concluye que el eje radical es la recta e .

Teorema

Dadas tres circunferencias, sus ejes radicales, dos a dos, son concurrentes. El punto común se llama **centro radical** de las tres circunferencias y tiene igual potencia respecto a cada una de ellas.

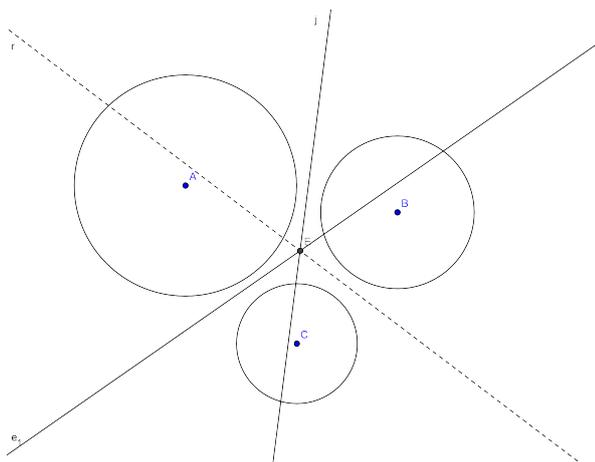


Figura 6: Fig 6

Demostración

Denotemos la potencia del punto X con respecto a la circunferencia Y como: $P_Y(X)$.

Sea E el punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias A y B y de B y C . Como E está sobre el eje radical de A y B entonces tenemos que $P_A(E) = P_B(E)$, análogamente con las circunferencias B y C tenemos que $P_B(E) = P_C(E)$ así que tenemos que $P_A(E) = P_B(E) = P_C(E)$ por lo que $P_A(E) = P_C(E)$, comprobando que E está también sobre el eje radical de A y C por lo que los tres ejes radicales pasan por el mismo punto E .

Problemas

1. Dados dos circunferencias que se intersectan en un punto, cuál es el eje radical? Y si se cortan en dos puntos distintos?
2. Construir el eje radical de dos circunferencias dadas con regla y compás sin medidas.
- 3.Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales las tangentes a dos circunferencias dadas tienen igual medida?
4. Cuando la distancia entre los centros de dos circunferencias es mayor a la suma de sus radios los círculos tienen cuatro tangentes en común. Probar que los puntos medios de todos estos segmentos son colineales.
5. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea T un punto en su interior tal que $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sean M , N y P las proyecciones de T en BC , CA , y AB , respectivamente. El circuncírculo de MNP intersecta a las rectas BC , CA , y AB por segunda vez en M' , N' y P' respectivamente. Probar que el triángulo $M'N'P'$ es equilátero.
6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares, sea P el punto de intersección. Prueba que las reflexiones de P con respecto de AB , BC , CD y DA son concíclicas.
7. Sea BC el diámetro de un semicírculo y A su punto medio. Sea M un punto sobre el segmento AC y P, Q los pies de las perpendiculares desde A y desde C a la línea BM , respectivamente. Prueba que $BP = PQ + QC$.