Primer Entrenamiento de Combinatoria — ONMAPS 2° Secundaria

Owen Yael Mireles Briones

Organización de Información

Sobre todo en un nivel básico, los problemas de combinatoria requieren poder organizar la información y trabajar ordenadamente en los casos que se presenten. Con este propósito, los siguientes problemas buscarán reforzar estos hábitos.

Antes de empezar a resolver un problema de matemáticas, hay que detenerse y pensar: lo que me pide el problema, ¿qué conlleva?

Si una cuadrícula de n x n tiene su borde coloreado de rojo y si exactamente 44 cuadritos tienen sólo un lado pintado de rojo, ¿cuánto vale n?

Hay que notar que los cuadrados de las esquinas tienen dos lados rojos; los cuadritos en el interior no poseen bordes rojos.

¿Cuántos triángulos existen en la siguiente figura?

La observación crucial es ver que hay triángulos de tres tamaños. Luego, para volver el conteo efectivo, hay que contar primero los triángulos pequeños, luego los medianos y al final los grandes, para evitar el conteo doble.

Del problema anterior, hemos visto la eficacia de, una vez ya obtenida, saber organizar y ordenar la información. Esto es más una heurística, es muy general. Cuando el problema parezca confuso o muy complejo, una herramienta útil es partir el problema en sub-casos.

Existen seis rutas entre Baja California y Guanajuato y hay tres rutas distintas entre Guanajuato y Yucatán. Si Juan desea viajar de Baja California a Yucatán y quiere hacer escala en Guanajuato, ¿de cuántas maneras puede viajar?

Se puede contar a mano. Como segunda solución, podemos modificar un poco el diagrama del dibujo y hacer con él un diagrama de árbol. Podemos, más o menos intuitivamente, introducir el Principio de la Multiplicación.

El siguiente problema introduce la noción de que existen distintas formas de ver un problema y que alguna de ellas en particular puede facilitar la resolución del problema.

Tenemos tres cuadrados pegados, en una fila. Podemos colorear cada cuadrado de verde, azul o rojo. ¿De cuántas maneras podemos colorear los cuadrados de tal manera que cualesquiera dos cuadrados adyacentes tengan distinto color?

De manera ordenada, podemos ir construyendo cada coloreo y contar todos: es algo tedioso. También podemos ver cuántos casos hay en total (principio de multiplicación) y luego quitar los casos que no nos sirven.

Principio Multiplicativo y Principio Aditivo

El *Principio Aditivo* dice: si hay n formas de realizar una acción y m formas de realizar otra acción y ambas acciones no pueden realizarse al mismo tiempo, entonces hay $n+m$ de escoger alguna de estas acciones.

¿Cuántas soluciones en enteros no-negativos hay para lo siguiente: $-5 < x < 5$ ó $12 < x < 100$?

Notar que hay que quitar los casos $-5 < x < 0$ y luego contar los otros $5 + 87 = 93$ casos.

Si 6 monedas indistinguibles se lanzan al aire, cuando caigan, ¿cuántas combinaciones distintas pueden salir?

Como son indistinguibles, sólo importa la cantidad de águilas/sellos que haya.

De manera parecida, el *Principio Multiplicativo* dice: si hay n maneras de hacer una acción y m maneras de hacer otra acción después de esa primera, entonces hay $n \times m$ formas de realizar ambas acciones.

Hay 8 periódicos y 5 revistas semanales que se publican en Guanajuato. Si Jaime se suscribe a exactamente un periódico y a una revista, ¿cuántas opciones tiene?

Sólo multiplicar.

El siguiente problema resulta más retador, pues combina ambos principios.

Diego quiere ir a la Ciudad de México desde Salamanca. Puede elegir entre 3 servicios de autobuses o 2 servicios de tren que van desde Salamanca hasta el Estado de México. Una vez ahí, puede elegir entre 2 servicios de autobuses o 3 servicios de tren que llegan a la Ciudad de México. ¿De cuántas maneras se puede viajar?

Notar que hay que aplicar ambos principios de forma alternada.

Combinaciones y Permutaciones con/sin repetición.

Pese a que pueden parecer algo triviales los resultados anteriores, con ayuda de éstos podemos responder tres preguntas muy importantes.

La primera es:

Se quieren poner en una lista k números entre 1 y n, ¿de cuántas maneras puede hacerse?

Recordar que importa el orden de la lista.

Lo que se está contando aquí son las *permutaciones con repetición*: el orden importa y podemos elegir cada objeto cuantas veces queramos.

La segunda es:

Se quieren poner en una lista k números distintos entre 1 y n, ¿de cuántas maneras puede hacerse?

Sigue importando el orden.

Como aquí ya no podemos repetir los números ya usados, decimos que éstas son *permutaciones sin repetición*.

La tercera pregunta es:

Se quieren escoger k números distintos entre 1 y n, ¿de cuántas maneras puede hacerse?

No importa el orden, no hay repetición.

Lo que se cuenta aquí son combinaciones.

La tercera pregunta es la más difícil de responder. Para hacer más gradual el brinco, primero resolveremos algunos problemas preliminares.

¿Cuántas diagonales tiene un n-ágono?

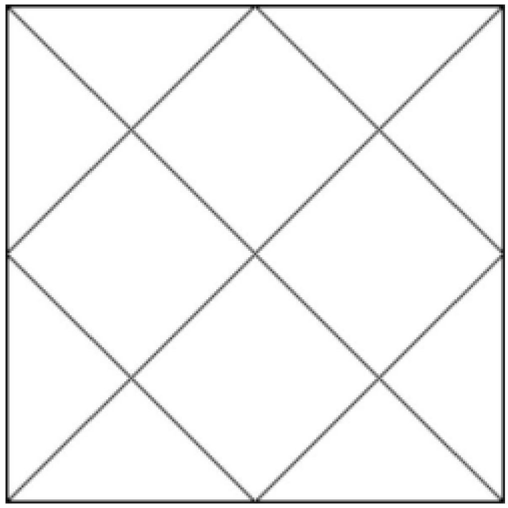
Lo importante es reconocer la importancia de saber cuántas veces estás contando cada objeto y compensarlo.

Para terminar la parte de la teoría, un problema que haga uso de las combinaciones y del principio multiplicativo.

En un salón hay 7 niñas distintas y 7 niños distintos. Se quieren formar dos comités de 5 personas cada uno, uno de niñas y otro de niños. ¿De cuántas maneras pueden escogerse los dos comités?

Problemas

1. ¿Cuántos triángulos hay en el siguiente diagrama?



2. En una fiesta, todos se saludaron con un apretón de manos exactamente una vez. Hubo 66 saludos. ¿Cuánta gente había en la fiesta?
3. ¿Cuántos números positivos de 4 dígitos tienen 2 o más ceros?
4. Con las letras A, K, N, R se forman todas las posibles palabras que usen exactamente cada letra una vez. Se ordenan alfabéticamente estas palabras. ¿En qué posición se encuentra la palabra RANK?
5. Se escriben todos los números entre 1 y 100,000. La cantidad de veces que se escribe el dígito "1" es A; la cantidad de veces que se escribe el dígito "2" es B. ¿Cuánto vale A – B?
6. ¿Cuántos números de 3 dígitos existen tales que el dígito de las centenas es estrictamente menor que el dígito de las decenas que, a su vez, es estrictamente menor que el dígito de las unidades?
7. ¿Cuántos enteros positivos existen que no tengan dígitos repetidos?
8. ¿La cantidad de números de 7 dígitos cuyos dígitos suman 10 y cuyos dígitos sólo pueden ser 1, 2 o 3 es…?
9. En una cuadrícula de 10 x 7 cuadritos se empieza en la esquina inferior izquierda y se quiere llegar a la esquina superior derecha. Si sólo se puede mover hacia arriba y hacia a la derecha, ¿cuántos caminos existen?
10. Hay 5 cajas distinguibles. Hay 10 pelotas blancas y 10 pelotas negras que, salvo el color, son indistinguibles entre sí. ¿De cuántas formas se pueden guardar las 20 pelotas en las cajas?