Primer entrenamiento de Sedes: Teoría de Números

Myriam Hernández Ketchul

11 y 12 de mayo de 2018

Resumen

Este es el primer entrenamiento por sedes de teoría de números. En este entrenamiento se abararán los temas:

- Números primos.
- Divisibilidad.
- Teorema Fundamental de la Aritmética.
- Factorización en primos.
- Cantidad de divisores de un número.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En caso de que alguno de estos temas no hayan sido vistos por completo durante la sesión de entrenamiento, te recomendamos investigar al respecto(Internet está lleno de información) y en caso de dudas concretas contactarnos.

A continuación se presentan algunas definiciónes y teoremas que creemos te serán útiles.

Teoría

Definición 1 *Un entero b es divisible por un entero a, no cero, si existe un entero x tal que $b = ax$, y escribimos $a \mid b$. En caso de que b no sea divisible por a, escribimos $a \nmid b$.*

Teorema 1 (Teorema Fundamental de la aritmética) *Todo número natural puede ser escrito de forma única como producto de primos.*

Definición 2 (Máximo común divisor) *Dada una colección de números enteros distintos de cero $a_1, a_2, \cdots, a_n$ su máximo común divisor, en símbolos $mcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, es el mayor de sus divisores comunes, es decir, $d = mcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ si $d \mid a_1, d \mid a_2, \cdots, d \mid a_n$, y cualquier número entero que cumpla estas condiciones es menor o igual que d.*

Teorema 2 *Sean a y b enteros no cero con $b \nmid a$. Si q y r son enteros tales que $a = bq + r$, entonces $mcd(a, b) = mcd(b, r)$*

Teorema 3 (Algoritmo de la división) *Dados cualesquiera enteros a y b con $a > 0$, existen enteros q y r únicos tales que $b = qa + r, 0 \leq r < a$. Si $a \nmid b$, entonces r satisface la desigualdad estricta $0 < r < a$.*

Teorema 4 (Algoritmo de Euclides) *Sean a y b enteros no cero. Entonces $d = mcd(a,b)$ es combinación lineal de a y b.*
Como lema se sigue que cualquier divisor común de a y b también es divisor de d; y un número c es combinación lineal de a y b si y sólo si es múltiplo de d.

Definición 3 (Mínimo común múltiplo) *Sean $a_1, a_2, ..., a_k$ enteros no cero. Definimos el mínimo común múltiplo de ellos, en símbolos $mcm[a_1, a_2, ..., a_k]$ como el mnor de todos los múltiplos comunes positivos de ellos.*

Ejercicios

Atención: Los ejercicios no están ordenados por orden de dificultad ni por tema.

Ejercicio 1. Encontrar 100 enteros consecutivos tales que nunguno de ellos es primo.

Ejercicio 2. ¿Cuántos enteros entre 100 y 1000 son divisibles entre 7?

Ejercicio 3. Expresar 20 como combinación lineal de 13 y 3.

Ejercicio 4. Odalys se baña sólo los días del mes que son números primos. ¿Cuántas veces se bañará en un periodo de 4 años?

Ejercicio 5. Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falso. ¿Cuál es el número de mi casa?

- La suma de las cifras del número es 6.
- Dos de las cifras del número son iguales.
- El número es menor que 110.
- El número es mayor que 40.
- El número es primo.

Ejercicio 6. Alicia va al club cada día; Beatriz va cada 2 días; Carlos va cada 3; Daniel cada 4; Enrique cada 5; Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelvan a reunirse?

Ejercicio 7. Encuentra el máximo común divisor de 42823 y 6409.

Ejercicio 8. ¿Cuál es el número de 10 cifras diferentes tal que el número formado por sus dos primeros dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, el número formado por sus tres primeros dígitos es divisible entre 3, y así sucesivamente hasta el número formado por sus nueve primeros dígitos, es divisible entre 9; y el número es divisible entre 10?

Ejercicio 9. Tenemos tres cubetas, con capacidades de 2, 4 y 7 litros. Para llenar un tinaco de 100 litros, disponemos una toma de agua cerca del tinaco. ¿Cuál es el mínimo número de vueltas que debemos realizar entre el tinaco y la toma de agua para llenar el tinaco, de forma que no sobre agua en las cubetas si en cada vuelta podemos cargar máximo dos cubetas?

Ejercicio 10. Sean a, b y c enteros tales que $a \mid bc$. Demuestra que si a y b son primos relativos entonces $a \mid c$.

Ejercicio 11. Si $b_1, b_2, ..., b_k$ son enteros y un primo p es divisor del producto $b_1 b_2 \cdots b_k$, entonces p divide a alguna de las b_i.

Ejercicio 12. Encontrar la suma de todos los divisores positivos de 360.

Ejercicio 13. Encontrar el producto de todos los divisores positivos de 360. (Escribir el resultado como potencia de 360)

Ejercicio 14. Muestra que $4 \nmid (n^2 + 2)$ para cualquier entero n.

Ejercicio 15. Prueba que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6 y que el producto de cuatro consecutivos por 24.