Entrenamiento ONMAPS Guanajuato

Primaria (Combinatoria)

Algunos puntos previos:

1.- En este texto y en los entrenamientos, se usará el punto medio "·" para indicar multiplicación entre dos cantidades. Por ejemplo, en lugar de escribir 5×7, escribiremos $5 \cdot 7$

2.- Cuando se suman o se multiplican varias cantidades, no importa el orden en que se hagan las operaciones. Por ejemplo, $3 + 12 + 49$ es lo mismo que $12 + 3 + 49$ y todas las demás combinaciones. Lo mismo pasa con $3 \cdot 4 \cdot 5$, que es igual a $4 \cdot 5 \cdot 3$, por ejemplo. A veces si se suma o multiplica en cierto orden, se pueden simplificar algunos cálculos.

3.- Si el resultado de algún problema implica hacer operaciones con números bastante grandes, es preferible dejar las operaciones indicadas. Por ejemplo, si el resultado es algo del estilo de "se usaron $2014 \cdot 369 \cdot 880$ cubos para construir…", es mejor tanto para ustedes como para nosotros que no hagan las multiplicaciones con esos números grandes y sólo dejen el resultado así. En un examen les quitará mucho tiempo y pueden tener errores al hacerlas.

Principio Aditivo y Principio Multiplicativo

Como el nombre lo indica, estos principios tendrán qué ver con suma y multiplicación, respectivamente. Se usan principalmente en problemas de Combinatoria. Es más o menos fácil identificar este tipo de problemas, pues por lo general dicen "*¿Cuántos…?*", esto es, se usan para contar cosas.

En términos más o menos técnicos, el principio aditivo se utiliza cuando se debe elegir una de entre varias opciones, teniendo cada una de estas opciones varias formas de ser realizada/elegida. Lo que nos dice el principio es que el número total de posibles elecciones que tenemos es la suma de los números de formas en que se pueden realizar las opciones que tenemos.

El principio multiplicativo se utiliza cuando se debe hacer una elección de entre varias posibles para cada una de varias tareas distintas. Lo que nos dirá el principio es que el número total de posibles elecciones que tenemos para hacer todas las tareas es la multiplicación de los números de elecciones que tenemos para cada tarea.

Lo anterior suena un poco revoltoso; por ello, presentamos un ejemplo:

En una fiesta hay pastel y gelatina. Hay 4 sabores de pastel y 9 de gelatina. Si te dicen: "Elige un sabor de pastel y uno de gelatina para servir tu plato", ¿de cuántas formas puedes hacer tu elección?

Si observamos, aquí tenemos que realizar un par de "tareas", las cuales son elegir un sabor de pastel y uno de gelatina. Para la primera de ellas, tenemos 4 posibles elecciones, mientras que para la segunda tenemos 9. Entonces, el principio multiplicativo nos dice que para calcular de cuántas formas podemos hacer esas "tareas", hay que multiplicar 4 por 9. Por lo tanto, el resultado es 36. Supongamos que ahora tenemos el siguiente problema:

Si en lugar de lo anterior te dicen: "Elige un sabor de pastel o uno de gelatina para servir tu plato", ¿de cuántas formas puedes hacer tu elección?

Observemos que aquí cambia el problema. Podemos pensar que sólo tenemos que hacer una tarea, que podríamos llamar "Elegir postre", y que tenemos dos opciones: "Elegir pastel" o "Elegir gelatina". Para la primera opción tenemos 4 elecciones diferentes y para la segunda tenemos 9. Aquí ahora aplicamos el principio aditivo, el cual nos dice que el número total de formas en que podemos elegir postre lo podemos calcular sumando 4 y 9, que es 13.

Una cosa importante que hay que notar es que la diferencia entre los dos problemas anteriores radicó sólo en usar las letras "o" y "y". Por lo general, podemos traducir la "o" por hacer una suma, y la "y" por hacer una multiplicación.

Presentamos otro ejemplo:

Al cumpleañero de la fiesta anterior ya le compraste su regalo, pero falta la envoltura. La caja en la que irá puede ser chica, mediana o grande. Si se elige la chica, ésta puede ser de 5 colores diferente; si se elige la mediana, de 3 y si se elige la grande, de 6. Si independientemente del tamaño, la caja puede llevar o no un moño, ¿de cuántas formas diferentes puede ser la envoltura del regalo?

Fijémonos que en este problema tenemos que elegir una caja **y** si lleva o no moño. Usando el principio multiplicativo, sabremos cuántas opciones tenemos multiplicando el número de posibilidades que tenemos para cada una de estas dos tareas. Para el moño es fácil, pues como sólo puede o no llevarlo, tenemos 2 formas de hacer esta tarea. Para la caja, tenemos que elegir entre chica, mediana **o** grande. Usando el principio aditivo, obtenemos $5 + 3 + 6 = 14$ formas de elegir la caja. Por lo tanto, el número de formas diferentes que puede ser la envoltura del regalo es $2 \cdot 14 = 28$.

Si en el problema anterior el moño puede ser de 7 colores diferentes, ¿cuántas opciones tenemos ahora para la envoltura del regalo?

En el problema anterior, tenemos 14 diferentes cajas con moño, y 14 sin él. Para cada una de esas 14 con moño, podemos elegir ahora entre 7 colores diferentes para el moño. Usando principio multiplicativo, tenemos un total de $14 \cdot 7 = 98$ cajas diferentes con moño. Sumándole a esta cantidad el número de cajas que teníamos sin moño, nos da un total de 112 posibilidades para la envoltura del regalo.

Con todo lo anterior, ahora presentamos una lista de problemas en los que se puede aplicar lo anterior:

1.- Gaby tiene 15 blusas, 10 faldas, 9 pares de zapatos y 8 pares de botas. Cada artículo es diferente de los demás. Se viste con una blusa, una falda y un par de alguno de los dos tipos de calzado. ¿De cuántas formas se puede vestir?

2.- Las ciudades de Nápoles, Venecia, Roma y Florencia están unidas entre ellas. A cada dos de ellas las unen 7 caminos diferentes. ¿De cuántas formas se puede ir de Venecia a Florencia sin pasar dos veces por la misma ciudad?

3.- En un entrenamiento de tiro con arco, Susan debía incrustar una flecha en 8 frutas diferentes. Si falló 3 de sus tiros, ¿de cuántas formas pudieron haber quedado las frutas? (Una posible forma es: a las frutas 1, 4, 5, 7 y 8 les incrustó una flecha y a las frutas 2,3 y 6 les falló).

4.- En el Bosque de los Mundos hay 5 estanques nuevos, 3 adultos y 8 viejos. Cada uno de ellos conduce a un mundo distinto. Si Digory entra primero a un estanque nuevo, puede regresar y luego entrar a otros 2: uno adulto y uno viejo, en cualquier orden. Si entra primero a un estanque adulto, puede regresar y luego entrar a otro, mientras no sea adulto, y si entra a uno viejo primero, ahí termina su recorrido. (Si por ejemplo entra primero a un estanque adulto y luego decide entrar a uno nuevo, ya no puede elegir visitar otros 2 mundos; las reglas descritas sólo aplican para el tipo de estanque que visita primero). ¿De cuántas formas puede hacer Digory un recorrido?

5.- Claudia quiere pintar las 5 paredes de su habitación. Ha comprado 12 colores diferentes de pintura. ¿De cuántas formas puede pintar su habitación? ¿Y si no quiere que 2 paredes juntas tengan el mismo color? ¿Y si no quiere 2 paredes del mismo color?

6.- La calculadora de Ale perdió las teclas 0, 1 y 2. En ella, puede escribir un número de hasta 8 dígitos. ¿Cuántos números distintos puede escribir en ella? ¿Y si quiere escribir un número de 6 dígitos que tenga un único dígito 5? ¿Y si quiere uno de 4 dígitos que tenga un único 5 y un único 4?

7.- Chío quiere escribir un número de 9 dígitos sin usar 2 veces un mismo dígito. ¿Cuántos números distintos puede escribir?

8.- En la lotería se escoge una combinación de 6 números. Cada uno de ellos se elige de entre el 1, 2, 3,…, 64, pudiéndose repetir. Trino cree que el dígito 3 es de mala suerte, así que decide comprar un boleto en el que no aparezca. ¿Cuántas opciones de boletos tiene Trino?

9.- A, B, C y D toman cada uno una ficha de dominó. Notan que la cantidad de puntos en cada ficha que tomaron es la misma. ¿De cuántas formas es esto posible?