Principio de Casillas

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

1 Introducción

Imaginemos que tenemos 7 cajas, entre las que deseamos repartir 8 pelotas. Es claro que no hay manera de repartir las pelotas de forma equitativa entre las cajas, al menos una deberá tener dos objetos. No tenemos ninguna garantía de que exactamente una caja tenga exactamente dos pelotas (podrían ser cuatro cajas con dos pelotas, o bien una caja con las ocho pelotas). Es claro que los números 7 y 8 no tienen ninguna reelevancia. Tendríamos la misma situación si fueran 20 cajas y 21 pelotas, o 342 cajas y 343 pelotas. En general, podemos enunciar el siguiente principio:

Principio básico de las casillas Si se reparten (al menos) $n+1$ pelotas entre n cajas, alguna caja tendrá por lo menos 2 pelotas dentro de ella.

De hecho, este enunciado puede establecerse de manera más general. Supongamos que tenemos 7 cajas, pero ahora deseamos repartir 22 pelotas. Ahora podremos asegurar que hay por lo menos 4 pelotas en una caja, ya que de otro modo, cada caja tendría a lo más 3 pelotas y en total habría a lo más $3 \times 7 = 21$ pelotas. En general:

Principio de las casillas Si se reparten (al menos) $nk+1$ pelotas entre n cajas, alguna caja tendrá por lo menos $k+1$ pelotas dentro de ella.

Demostración Si cada caja contiene a lo más k pelotas, tendremos que entre todas contienen a lo más nk pelotas. Como tenemos $nk+1$, alguna deberá contener al menos $k+1$ pelotas.

Este principio, por muy evidente que parezca, puede resultar de gran ayuda al resolver problemas. En general, la dificultad consistirá en establecer quiénes son las pelotas y quiénes son las cajas.

2 Ejercicios

1. Entre trece personas, hay dos que nacieron el mismo mes.
2. Entre 101 números, hay dos cuya diferencia es múltiplo de cien.
3. ¿Cuál es el menor número de personas necesarias para que podamos asegurar que hay dos con la misma fecha de cumpleaños?
4. En un cajón, hay calcetines de varios colores. Sabemos que si sacamos 11 calcetines, habrá dos calcetines del mismo color. ¿Cuántos colores distintos de calcetines hay en el cajón?

3 Problemas

1. Dados ocho números enteros positivos distintos, todos ellos menores que quince, se enlistan todas las diferencias (positivas) entre parejas de ellos. Demuestra que hay un número que aparece al menos tres veces en dicha lista.
2. En una fiesta, hay dos personas que conocen al mismo número de personas en la fiesta.
3. ¿Cuál es el menor número de cuadros de un tablero de ajedrez que podemos colorear de manera que si colocamos una ficha de triminó sobre el tablero, al menos uno de los cuadros que cubra esté coloreado?

4. ¿Cuál es el máximo número de reyes que podemos colocar en un tablero de ajedrez de manera que no haya dos que se ataquen mutuamente?

5. Prueba que un triángulo equilátero no puede ser cubierto completamente por dos triángulos equiláteros menores.

6. Se tienen siete líneas rectas en un plano, no hay dos paralelas. Prueba que hay dos que forman un ángulo menor a $26°$.

7. En un papel cuadriculado de 6×9 cuadros se trazan 25 triángulos diferentes que tienen sus vértices en los puntos de intersección de las líneas de la cuadrícula. Muestra que hay al menos dos triángulos con un vértice en común.

8. Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 3×7 se colorean de negro y los demás se dejan de blanco. Prueba que podemos encontrar un rectángulo con vértices en los centros de cuatro cuadrados de la cuadrícula que sean del mismo color.

4 Problemas Avanzados

1. Entre cualesquiera seis personas hay tres tales que se conocen todas entre sí o tres tales que ninguna conoce a alguna de las otras dos.

2. Sea A un número de 40 cifras. Denotamos por a_i al i-ésimo dígito de A. Demuestra que existen cuatro números todos distintos i, j, k y l entre 1 y 40 inclusive tales que $i + j = k + l$ y $a_i + a_j = a_k + a_l$.