PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN

Erik Orson Delgado Romo

1. Conceptos básicos

El **piso** de un número x se refiere al mayor número entero que es menor a x, se representa $\lfloor x \rfloor$. Por ejemplo, $\lfloor 2.001 \rfloor = 2$, $\lfloor 19.99999999 \rfloor = 19$, $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$,$\lfloor -5.5 \rfloor = -6$. Ten cuidado al aplicar piso a un número negativo, en el caso de -5.5 se podría pensar que su piso es -5, pero esto no es cierto porque $-5 > -5.5$.

El **techo** de un número x se refiere al menor número entero que es mayor a x, se representa $\lceil x \rceil$. Por ejemplo, $\lceil 2.001 \rceil = 3$, $\lceil 19.99999999 \rceil = 20$, $\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$, $\lceil -5.5 \rceil = -5$.

Los **conjuntos** son formados por elementos de la misma naturaleza, es decir, que son diferentes entre ellos pero poseen en común ciertas propiedades o características. Algunos ejemplos son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $P = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. Hay varias formas de expresar los conjuntos $P = \{2x | \, x \in \mathbb{Z}\}$, esto se leería como "El conjunto P está formado por los números de la forma $2x$ tal que x pertenece a los números enteros".

Cuando un conjunto está vació se puede escribir como $A = \{\}$.

Para referirnos al número de elementos de un conjunto A se escribe $|A|$.

La **intersección** de dos conjuntos A_1 y A_2, se refiere al conjunto de elementos que estén en A_1 y en A_2, se escribe $A_1 \cap A_2$. Por ejemplo, si $A_1 = \{1,3,5,7,9\}$ y $A_2 = \{2,3,5,7\}$, entonces $A_1 \cap A_2 = \{2,3,5,7\}$.

La **unión** de dos conjuntos A_1 y A_2, se refiere al conjunto de elementos que estén en A_1 o en A_2, se escribe $A_1 \cup A_2$. Por ejemplo, si $A_1 = \{1,3,5,7,9\}$ y $A_2 = \{2,3,5,7\}$, entonces $A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,5,7,9\}$.

2. Principio de inclusión exclusión

Siempre que tengamos una lista de elementos y queremos determinar cuántos de ellos cumplen con una lista de propiedades tenemos que tener cuidado al contar elementos que cumplan más de una propiedad.

Ejemplo:

Digamos que queremos saber cuántos números del 1 al 50 cumplen con una o más de las siguientes condiciones:

- El número es divisible entre 7.
- El número es divisible entre 14.
- El número es divisible entre 3.

Podemos rápidamente determinar cuántos números cumplen cada una de esas condiciones individualmente:

- Números del 1 al 50 que son divisibles entre 7 hay 7 $\left(\left\lfloor\frac{50}{7}\right\rfloor = 7\right)$
- Números del 1 al 50 que son divisibles entre 14 hay 3 $\left(\left\lfloor\frac{50}{14}\right\rfloor = 3\right)$
- Números del 1 al 50 que son divisibles entre 3 hay 16 $\left(\left\lfloor\frac{50}{3}\right\rfloor = 16\right)$

¿Si sumáramos a estos valores conseguiríamos la cantidad deseada de elementos? **<u>NO</u>**.

Para comprobar esto enlistaremos cada uno de los números de 1 al 50 que cumple alguna de las tres propiedades:

3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 45, 48, 49

Existe una diferencia de 5 elementos entre el primer valor y la cantidad de elementos que tiene la lista que construimos (21). ¿Por qué es más grande nuestro primer valor si cuándo hicimos nuestro primer cálculo solo incluimos a números que cumplían con lo pedido? ¿Hemos estado contando varias veces a algunos números?

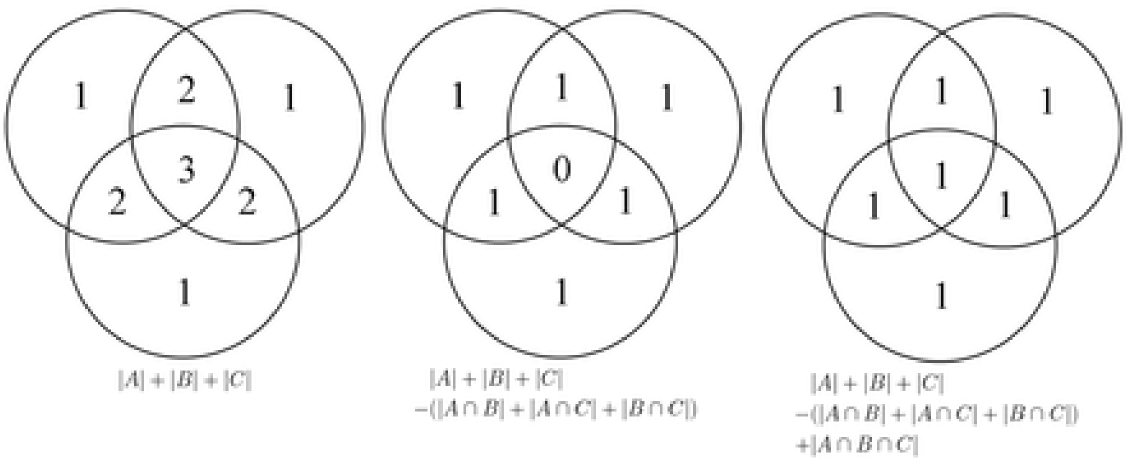
Hay algunas cosas que tenemos que tomar en cuenta:

- Cada valor divisible entre 14 es divisible por 7. Los valores que cumplen estas dos condiciones los estamos sumando al menos 2 veces. Estos son 14, 28, y 42.
- Cada valor que es divisible entre 7 y 3 es divisible entre 21. Los valores que cumplen estas dos condiciones los sumamos al menos 2 veces. En este caso está 21 y 42.
- Los valores que son divisibles entre 3 y 14 fueron contados al menos 2 veces. En este caso el único valor que cumple es 42.
- Todos los valores que cumplan con las tres condiciones se contaron 3 veces. El único valor en este rango es 42.

Para llegar de nuestro cálculo original a 21 tenemos que quitarle a 26 los valores que sumamos de más. Los valores que cumplen dos diferentes condiciones se contaron dos veces por lo tanto los restaremos de 26, en total hay 6 de estos y nos quedamos con 20, luego como los valores que cumplen con las tres condiciones los restamos tres veces (en este caso 42 lo quitamos 3 veces pues estaba en cada intersección de dos condiciones) y estos lo tenemos que sumar otra vez a nuestra cuenta para incluirlo, y nos quedamos con 21.

El procedimiento que realizamos anteriormente se basa en el principio de inclusión exclusión.

Hay varias maneras de verlo pero la más fácil es por medio de diagramas de Venn.



Cada agrupación de círculos representa una etapa del procedimiento anterior y las sumas que se realizan. Así se puede ver que al sumar los elementos de cada condición $|A| + |B| + |C|$, las intersecciones de dos condiciones se contaran 2 veces y la intersección de las tres condiciones se contará 3 veces. Al restar una vez las intersecciones de dos condiciones $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$, como hay 3 de estos, la intersección de las tres condiciones ya no se estaría contando ninguna vez, por lo que se deberá de sumar una vez $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Ya dominando lo anterior podemos hacerlo más general.

Principio de Inclusión y Exclusión. Supongamos que tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ (posiblemente con elementos en común). Entonces el número total de k de elementos que tienen entre todos es igual a $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + -\cdots k_n$, donde k_1 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) uno de los conjuntos, k_2 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) dos de los conjuntos, y así sucesivamente hasta k_n, que es el número de elementos en común a todos los conjuntos.

Otra forma de expresar las $k's$ es $k = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$, $k_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$, $k_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$, y así sucesivamente hasta $k_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$.

Demostración. Tomando un elemento cualquiera que pertenezca a $A_1, A_2, \dots, A_r$ y sólo a estos. Entonces el número de veces que el elemento se considera en la suma $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + - \cdots k_n$ es

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} + - \cdots \binom{r}{r},$$

que si recuerdas el problema 19 del material de la Propiedad Distributiva, es fácil ver que lo anterior es igual a $\binom{r}{0} = 1$. Entonces $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + - \cdots k_n$ cuenta cada elemento exactamente una vez.

3. Datos de vital importancia

Si ya te cansaste (espero que no) revisa los siguientes datos

1. En la trayectoria intelectual de Johannes Kepler, descubridor de modelos matemáticos para describir el movimiento planetario, música y astronomía convergen como aspectos que permiten explicar el orden del cosmos. https://www.revistaciencias.unam.mx/en/102-revistas/revista-ciencias-100/714-la-musica-de-las-esferas-taditio-y-canon-astronomico-musical-de-kepler.html
2. La forma, cantidad y posición de las rosetas (manchas) en los tres felinos manchados que hay en México (jaguar, margay y ocelote) varían de un individuo a otro, como si fuera una huella digital. https://www.biodiversidad.gob.mx/Biodiversitas/Articulos/biodiv118art1.pdf

3. Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están bien definidos? Si lo están, defínelos.
   a) La colección de todos los caracteres alfanuméricos.
   b) La colección de todas las personas altas.
   c) La colección de números enteros x tal que 2x-9=16
   d) La colección de números reales x tales que 2x-9=16
   e) La colección de todos los jugadores de tenis buenos.
2. Si el conjunto N es el conjunto de todos los enteros positivos (el conjunto de los naturales), A = {2, 4, 6, 8 ,10} y B = {1, 3, 6, 7, 8}, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?
   a) 2 ∈ A

b) $11 \in$ B
c) 4 no pertenece a B
d) $A \in N$
e) $A = \{2x \mid x \in N\}$

3. ¿Verdadero o falso?
   a) $\emptyset = \{0\}$
   b) $x \in \{x\}$
   c) $\emptyset = \{\emptyset\}$
   d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. Los siguientes conjuntos fueron expresados usando notación de compresión, enlista todos (o algunos en caso de que hayan muchos) de sus elementos.
   a) $\{p \mid p\ es\ una\ ciudad\ capital,\ p\ esta\ en\ Europa\}$
   b) $\{x \mid x = 2n - 5,\ n \in N\}$
   c) $\{y \mid 2y^2 = 50,\ y \in N\}$
   d) $\{z \mid 3z = n^2,\ n,\ z \in N\}$

4. Problemas

1. ¿Cuántos enteros del 1 al 100 son múltiplos de 2 o 3?
2. En un examen de preparatoria el 80% de los estudiantes pasaron el examen de matemáticas, el 85% el de inglés y el 75% de los estudiantes pasaron ambos, si 45 de los candidatos reprobaron ambos exámenes, ¿Cuántos estudiantes hay?
3. Una tienda comercial en Australia, que regularmente tiene 1000 clientes diarios, está regalando un sobre de papas a cada 11avo cliente y un kilo de carne de canguro a cada 13avo. ¿Cuantos clientes consiguen un producto gratis?
4. En una escuela de 1000 alumnos hay 3 clubes, uno de ajedrez, uno de futbol y uno de actuación. Supón que los siguiente se cumple:
   - Los miembros del club de ajedrez numeran 310.
   - Los miembros del club de futbol numeran 650.
   - Los miembros del club de actuación numeran 440.
   - La cantidad de estudiantes que están tanto en el club de ajedrez como en el de futbol es de 170.
   - La cantidad de estudiantes que están en el club de ajedrez y de actuación es de 150.
   - La cantidad de estudiantes que están en el club de futbol y de actuación es de 180.
   - Todos los alumnos al menos están en club.

   ¿Cuál es la cantidad de estudiantes que están en los tres clubes?
5. ¿Cuántos números enteros del 1 al 60 son múltiplos de 3, 4 o 5?

6. Después de un examen nacional resulto que el 70% de los estudiantes pudieron resolver el problema 1 y solo un 60% pudieron resolver el problema 4. ¿Cuál es el porcentaje mínimo de estudiantes que resolvieron ambos problemas?
7. En una clase el 64% de los estudiantes pasaron el examen de física y el 68% el de matemáticas. ¿Cuál es la cantidad mínima de estudiantes que aprobaron ambos?
8. En la Olimpiada de Invierno de Moscú hay 200 periodistas extranjeros.
   -175 de ellos hablan alemán.
   -150 de ellos hablan francés.
   -180 de ellos hablan inglés.
   -160 de ellos hablan japonés.
   ¿Cuál es la cantidad mínima de periodistas que hablan los 4 idiomas?
9. ¿Cuál es la suma de los números del 1 al 100 que son múltiplos del 2 o el 3?
10. Hay 7 pelotas de 7 colores y 3 diferentes tipos de cajas. ¿De cuantas diferentes formas se pueden meter las 7 pelotas en las cajas de manera de que cada caja tenga al menos una pelota?
11. Considera todos los números positivos de 4 dígitos que se pueden escribir usando solamente los dígitos {1, 2, 3, 4}. ¿Cuántos de estos números tienen un primer digito par o un segundo digito par?
12. Hay 20 estudiantes participando en un programa de cursos después de clases. Los tres cursos son yoga, póker y pintura. 10 estudiantes toman yoga, 13 están el curso de póker y 9 están en el curos de pintura. Si hay 9 estudiantes tomando al menos 2 clases, ¿Cuántos estudiantes están tomando las tres clases?
13. En un pueblo de 351 adultos, cada adulto es dueño de un auto, una bicicleta o ambos. Si 331 son dueños de autos y 45 son dueños de bicicletas. ¿Cuántos dueños de autos no son dueños de bicicletas?
14. Petra le está dando clase a 30 estudiantes, 14 chicas y 16 chicos, sabe que 20 de ellos son zurdos. ¿Cuál es la cantidad mínima de chicas zurdas?
15. En Austria utilizan una cadena de 3 letras seguidas por una cadena de 3 dígitos como código en sus placas de automóviles. ¿Cuál es la probabilidad de que una placa tenga un código donde al menos una de las dos cadenas sea capicúa?
    Capicúa significa que la cadena es igual vista de atrás a adelante que de adelante para atrás. Ejemplo: ABBA, 101101
    Ejemplo:
    ABC-001 es una placa valida.
    ABA-023, ABC-101, AAA-010 son placas con al menos una cadena capicúa.
16. Jorge está a cargo de entrevistar a trabajadores calificados para una obra. De las 80 personas que entrevisto:
    - 45 eran pintores.
    - 50 eran electricistas.

- 50 eran fontaneros.
- 15 tenían habilidades en las tres áreas.
- Todos tenían al menos una habilidad.

Si contrato solo a los que tenían dos cualificaciones, ¿A cuántas personas contrato?

5. Videos

Introducción y notación de conjuntos

https://www.youtube.com/watch?v=1GjhwtQjZJk

https://www.youtube.com/watch?v=RHHA-bDhfGw

https://www.youtube.com/watch?v=MY24oAocK4c

https://www.youtube.com/watch?v=FX8mA6m9HxQ

Diagramas de Venn

https://www.youtube.com/watch?v=1EbYydBSmPE

Principio de inclusión y exclusión

https://www.youtube.com/watch?v=IKWrxnLmrrg

https://www.youtube.com/watch?v=StqBHsoa4QA

https://www.youtube.com/watch?v=f-itXdsiHno