5.4. Principio de las casillas

El principio de las casillas tiene la cualidad de permitirnos decir algo acerca de una situación, sin conocer bien la situación. El susodicho principio puede ser enunciado como sigue:

Si se tienen $nk + 1$ objetos de n clases, al menos una de las clases tiene al menos $k + 1$ objetos.

Un modo un poco menos abstracto: Si se tienen $nk + 1$ pelotas a acomodar en n cajas, al menos una de las cajas tiene al menos $k + 1$ pelotas.

Resuelve los siguientes problemas indicando qué representa las "pelotas" y qué las "cajas".

Problema 5.27 Una bolsa contiene bolas de dos colores: blanco y negro. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que hay que extraer de la bolsa, para garantizar que hay dos del mismo color? ¿Y para 10 del mismo color?

Problema 5.28 Un millón de pinos crecen en el bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de 600,000 agujas. Prueba que en el bosque hay dos pinos que tienen el mismo número de agujas. ¿Puedes asegurar que hay 3?

Problema 5.29 Dados 12 enteros, prueba que se pueden escoger 2 de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11.

Problema 5.30 La ciudad de México tiene más de 15 millones de personas. Prueba que deberá haber al menos 16 personas que tienen la misma cantidad de cabellos. Nota: Es conocido que toda persona tiene menos de 1 millón de cabellos.

Problema 5.31 25 cajas de manzanas son compradas en una tienda. Las manzanas son de tres tipos distintos y todas las manzanas de cada caja son del mismo tipo. Prueba que de entre las cajas hay al menos 9 que contienen el mismo tipo de manzanas.

Problema 5.32 Dados 8 números todos ellos distintos y no mayores que 15, prueba que al menos 3 parejas de ellos tienen la misma diferencia positiva (las parejas no necesariamente son disjuntas).

Problema 5.33 Prueba que en cualquier grupo de 5 personas, hay al menos 2 que tienen el mismo número de amigos en el grupo.

Problema 5.34 Una cierta cantidad de equipos de futbol entran a un torneo en el cual cada equipo juega con otro equipo exactamente una vez. Prueba que en algún momento durante el torneo existen dos equipos que han jugado, hasta ese momento, el mismo número de juegos.

Problema 5.35 ¿Cuál es el máximo número de cuadros que se pueden colorear en un tablero de ajedrez de tal forma que al colocar una ficha de triminó en cualquier parte del tablero, al menos uno de los cuadros cubiertos por la ficha de triminó no esté coloreado?

Problema 5.36 ¿Cuál es el máximo número de reyes que se pueden acomodar en un tablero de ajedrez de tal forma que no se ataquen uno a otro?

Problema 5.37 Diez estudiantes resolvieron un total de 35 problemas en la olimpiada de matemáticas. Cada problema fue resuelto por exactamente un estudiante. Hay al menos un estudiante que resolvió exactamente un problema, al menos uno que resolvió exactamente dos problemas y al menos uno que resolvió exactamente tres problemas. Prueba que hay al menos un estudiante que resolvió al menos cinco problemas.

Problema 5.38 Prueba que si colocamos cinco puntos en un triangulo equilátero de lado dos existen dos a distancia menor o igual a 1.

Problema 5.39 Prueba que un triangulo equilátero no puede ser cubierto completamente con dos triángulos equiláteros menores.

Problema 5.40 51 puntos han sido puestos en un cuadrado de lado 1 metro. Prueba que existen tres de esos puntos que pueden ser cubiertos por un cuadrado de lado 20 centímetros.

Problema 5.41 En un papel cuadriculado de 6×9 cuadros se consideran 25 triángulos arbitrarios y diferentes que tienen sus vértices en los puntos de intersección de las líneas de la cuadricula. Mostrar que no importa como se elijan los triángulos, forzosamente habrá (al menos) dos triángulos con un vértice en común.

Problema 5.42 Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 3×7 se pintan de negro y otros se dejan de blanco. Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo en cuyas cuatro esquinas los cuadritos tienen el mismo color (los cuatro blancos o los cuatro negros).

Problema 5.43 Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 19×4 se pintan de rojo, otros de azul y otros de verde (no se deja ninguno en blanco). Probar que forzosamente las líneas de la cuadricula forman un rectángulo cuyas cuatro esquinas tienen el mismo color.

Problema 5.44 Probar que en cualquier conjunto de seis personas forzosamente hay tres que se conocen todas entre sí o tres tales que ninguna conoce a ninguna de las otras dos.

Problema 5.45 En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente diez cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual a $\sqrt{2}$ o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $1/2$ de la orilla de la cuadrícula. (Problema 4, XIII OMM)

Problema 5.46 Cien personas están sentadas en una mesa redonda. Más de la mitad de ellas son hombres. Prueba que existen dos hombres que están sentados diametralmente opuestos.

Problema 5.47 Todos los puntos de una línea recta se colorean con 11 colores. Prueba que es posible encontrar dos puntos del mismo color que estén separados por un número entero de centímetros.

Problema 5.48 Hay siete líneas rectas en un plano. Prueba que hay dos de ellas que forman un ángulo menor a $26°$.

Problema 5.49 Se colorea cada casilla de un tablero de 5×41 ya sea de blanco o de negro. Prueba que es posible elegir tres columnas y tres filas de modo que las 9 casillas en las que se intersecan sean todas del mismo color.

Problema 5.50 Seis amigos decidieron ir a siete cines diferentes durante el fin de semana. Las funciones comenzaban cada hora, desde las 9 am hasta las 7 pm. Cada hora dos de ellos entraban a uno de los cines, y todos los demás iban a un cine diferente. Al final de cada día cada uno de ellos había visitado los siete cines. Prueba que para todo cine hubo una función a la cual no asistió ninguno de los amigos.

Problema 5.51 Cada punto de un plano es coloreado usando a) 2; b) 3; c) 100 colores. Prueba que se puede encontrar un rectángulo con todos sus vértices del mismo color.

Problema 5.52 ¿Cuál es el número máximo de arañas que pueden coexistir pacíficamente en las aristas de un cubo de arista igual a 1 m? Una araña tolera a una vecina únicamente a una distancia de a) 1 m; b) 1.1 m (medidas sobre las aristas).

Problema 5.53 Se tienen dos 16-ágonos regulares, y en cada uno se eligen siete vértices. Prueba que los dos 16-ágonos pueden ser superpuestos de modo que al menos cuatro de los vértices elegidos en uno de los 16-ágonos coincidan con vértices elegidos en el otro 16-ágono.

Problema 5.54 Hay 25 puntos en el plano, colocados de manera que entre cualesquiera tres de ellos hay dos que distan a lo más 1 cm entre sí. Prueba que es posible dibujar un cículo de radio 1 cm que cubra a 13 de estos puntos.

Problema 5.55 Se eligen seis puntos en un rectángulo de 3×4. Prueba que hay dos de ellos que están separados por una distancia de a lo más $\sqrt{5}$.

Problema 5.56 Un conjunto A de números naturales es tal que entre cualesquiera 100 números naturales consecutivos hay al menos un elemento de A. Prueba que es posible encontrar cuatro números naturales distintos a, b, c y d en A tales que $a+b=c+d$.

Problema 5.57 De una hoja de papel cuadriculado de 29×29 se cortan 99 cuadrados de 2×2. Prueba que es posible cortar otro cuadrado de 2×2.

Problema 5.58 Se cubre un tablero de 10×10 con 55 cuadrados de 2×2. Prueba que hay un cuadrado tal que puede ser removido y los restantes todavía cubren el tablero.

Problema 5.59 Un gran maestro de ajedrez juega al menos una partida al día pero no más de 12 partidas a la semana. Prueba que existen ciertos días consecutivos del año en los cuales él jugó exactamente 20 partidas.

Problema 5.60 Sobre un segmento de 10 cm de largo se colorean de rojo 10 segmentos disjuntos. Es sabido que no hay dos puntos rojos que estén a exactamente 1 cm de distancia. Prueba que la suma de las longitudes de los segmentos rojos es a lo más 5 cm.

Problema 5.61 Se dan 101 puntos dentro de un cuadrado de 1×1. Prueba que hay tres de ellos que forman un triángulo de área menor o igual a 0.01.

Problema 5.62 Se dibujan siete cuerdas en un círculo de radio 1, de modo que cualquier diámetro del círculo interseca a lo más a cuatro de ellas. Prueba que la suma de sus longitudes es a lo más 13.

Problema 5.63 En una habitación de área 5 se colocan 9 alfombras, cada una de área 1 y forma arbitraria. Prueba que hay dos alfombras que se traslapan por lo menos 1/9.

Problema 5.64 Una amiba de área mayor que 1 vive sobre un plano cartesiano. Prueba que hay dos puntos de la amiba (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tales que $x_1 - x_2$ y $y_1 - y_2$ son enteros.

Problema 5.65 Sea n un número que no es divisible entre dos ni entre 5. Prueba que existe un múltiplo de n que tiene solamente unos en su representación decimal.

Problema 5.66 Prueba que en cualquier hexágono convexo existe una diagonal que "corta" un triángulo con área menor o igual a un sexto de la del hexágono.

Problema 5.67 Se eligen seis puntos en un rectángulo de 3×4. Prueba que hay dos de ellos que están separados por una distancia de a lo más $\sqrt{5}$.

Problema 5.68 Dado un conjunto de diez números de dos dígitos, prueba que se pueden elegir dos subconjuntos ajenos de este conjunto de modo que la suma de los elementos de ambos subconjuntos sea la misma.

Problema 5.69 Prueba que en cualquier $2n$-ágono convexo hay una diagonal que no es paralela a ningún lado.

Problema 5.70 Se tienen $ab + 1$ ratones. Prueba que: o hay $a + 1$ ratones tales que cada uno de ellos desciende de alguno de los otros, o bien hay $b + 1$ ratones tales que ninguno de ellos es descendiente de ninguno de los otros.

Problema 5.71 Se tienen diez segmentos, cada uno de longitud mayor que 1 y menor que 55. Prueba que es posible construir un triángulo con tres de estos segmentos.

Problema 5.72 Dentro de un cuadrado de 1×1 se colocan varios círculos, cuyos perímetros suman 10. Prueba que existe una línea recta que interseca al menos a cuatro de los círculos.

Problema 5.73 Un círculo de radio 1 contiene siete puntos cuyas distancias mutuas son todas mayores o iguales a 1. Prueba que uno de los siete puntos es el centro del círculo.