Combinatoria. Taller 5

E. Delgado, I. Gómez, A. Ibarra, R. Muñoz, D. Rodríguez

19 de Abril 2018

Principio de las Casillas

Ejemplo 1. Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

Si sacamos 20 canicas puede ser que todas sean de diferente color. Por lo que la única manera de garantizar que hay dos canicas del mismo color es sacar 21 canicas. De la misma forma, para garantizar que tenemos al menos tres canicas del mismo color necesitamos elegir $41 = 2 \times 20 + 1$, ya que con sólo 40 canicas podríamos tener 2 canicas de cada color. Usando la misma estrategia necesitamos $20 \times 99 + 1 = 1981$ canicas para asegurar que hay 100 canicas del mismo color.

Principio de las casillas. Si se dispone de n casillas para colocar m objetos y $m > n$, entonces en algunas casillas deberán colocarse al menos dos objetos.

Ejemplo 2. En un grupo de tres personas hay dos del mismo sexo.

Ejemplo 3. En un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes.

En estos dos ejemplos los objetos son las personas. En el primer ejemplo las casillas son los dos sexos, y en el segundo los doce meses del año.

Ejemplo 4. Supongamos que se escogen cinco números enteros distintos entre el uno y el ocho. Demuestra que la suma de alguna pareja debe de ser 9.

Observemos que las parejas de enteros que suman 9 son: $(1,8)$,$(2,7)$,$(3,6)$ y $(4,5)$, asi, definamos los conjuntos A,B,C,D como:

$$A = \{1,8\}\ ,\ B = \{2,7\}\ ,\ C = \{3,6\}\ ,\ D = \{4,5\}$$

Notemos que $\{A, B, C, D\}$ es una partición de $\{1, 2, ..., 8\}$, como se escogen cinco números distintos, por el principio de las casillas dos de ellos deben de estar en alguno de los conjuntos A,B,C,D, es decir estos dos números suman nueve.

Ejemplo 5. Si se eligen 3 números enteros al azar la suma de dos de ellos es par.

Al elegir un numero entero al azar existen dos posibilidades, este puede ser primo o par lo que implica, por el principio de las casillas, que al elegir 3 números 2 de ellos tienen que estar en la misma categoría, dos de ellos son pares o dos son impares. Ademas sabemos que la suma de dos números impares es par y la suma de dos pares sigue siendo par, lo que nos garantiza la existencia de dos números cuya suma es par

Ejemplo 6. Cada cuadrito de un tablero de 3×7 se colorea con alguno de dos colores (digamos blanco y negro). Muestre que en cualquier coloración siempre hay un rectángulo del tablero que tiene los cuatro cuadritos de las esquinas del mismo color.

Cada columna de 3×1 sólo puede ser coloreada de 8 formas distintas. Simbolicemos N un cuadrito pintado de negro y B a un cuadrito pintado de blanco. Las posibilidades son las siguientes:

$$\begin{array}{cccc} t_1 = NNN & t_2 = NNB & t_3 = BNN & t_4 = NBN \\ t_5 = BBB & t_6 = BBN & t_7 = BNB & t_8 = NBB \end{array}$$

Si hay dos columnas pintadas de la misma manera, podemos detectar en ellas los cuatro cuadritos coloreados del mismo color, esto es lo que buscaremos. Supongamos primero que una de las columnas es del tipo 1. Si alguna de las columnas restantes es coloreada de alguno de los tipos 1, 2, 3 ó 4, terminamos. Por lo que podemos suponer que las seis columnas restantes están coloreadas de los tipos 5, 6, 7 u 8. Por el principio de las casillas, dos de las seis columnas se colorean igual y entonces también terminamos.Si alguna de las columnas es coloreada del tipo 8, un argumento análogo nos lleva también a concluir el ejemplo.

Finalmente supongamos que no hay ninguna columna del tipo 1 o del tipo 8, esto es, que las siete columnas están pintadas sólo de seis tipos diferentes. Otra vez, por el principio de las casillas, hay dos columnas que se colorean de igual forma, y también terminamos en este caso.

Problemas

Problema 1. Si tienes 5 sabores de helados en una heladería, ¿ Cuántas bolas de helado deben caber en tu bote de helado para garantizar que tenga 10 bolas del mismo sabor si se eligen los sabores al azar?

Problema 2. Supongamos que se escogen siete números enteros distintos entre el uno y el diez.

a) Demuestra que la suma de alguna pareja debe de ser 11.

b) ¿Se puede concluir lo mismo si se escogen seis enteros en lugar de siete?

Problema 3. Dados 6 enteros diferentes del conjunto $1, 2, \ldots, 10$, muestre que hay dos de ellos cuya suma es un número par.

Problema 4. (a) ¿Pueden las casillas de un tablero de 3×3 llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón,en cada columna y en cada diagonal sean diferentes?

(b) ¿Pueden llenarse las casillas de un tablero de 3×3 con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ de manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sean diferentes?

Problema 5. Prueba que si se ordenan los números $0, 1, 2, 3 \ldots 9$ en los vértices de un decágono existen tres vértices consecutivos cuya suma es mayor que 14.

Problema 6. En el espacio se dan 9 puntos de coordenadas enteras de los cuales no hay tres colineales. Muestre que hay un punto de coordenadas enteras sobre el segmento determinado por algún par de ellos.

Problema 7. En un papel cuadriculado de 9×6 cuadrados se consideran 25 triángulos arbitrarios y diferentes que tiene sus vértices en los puntos de intersección de la líneas de la cuadrícula. Mostrar que no importa como se elijan los triángulos, forzosamente habrá al menos dos triángulo con al menos un vértice en común.

Problema 8. Demuestre que toda sucesión de $n^2 + 1$ números reales distintos contiene una subsucesión de longitud $n + 1$ que es bien estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente.

Problema 9. (a) (OM 1990/5) En el plano se dan 19 puntos de coordenadas enteras de manera que no hay tres de ellos colineales. Muestre que hay tres de ellos con la propiedad de que el centroide del triángulo que forman, también tiene coordenadas enteras.

(b) Muestre que si se dan 13 puntos de coordenadas enteras siempre hay tres cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

(c) Muestre que con 9 puntos se puede concluir también que hay tres cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

Problema 10. Sean a, b, c y d enteros. Muestre que

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

es divisible entre 12.

Problema 11. Dados tres o más enteros muestre que hay dos de ellos i, j tales que 10 divide a $ij(i+j)(i-j)$.

Problema 12. Dados ocho números enteros diferentes entre 1 y 15, muestre que hay tres pares de ellos que tienen la misma diferencia (positiva).

Problema 13. Considere 20 enteros $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < 70$, y forme las diferencias $a_j - a_i$ para $1 \leq i < j \leq 20$. Muestre que al menos 4 de esas diferencias son iguales.

Problema 14. Muestre que no existe un conjunto de siete enteros positivos diferentes y menores o iguales a 24, tal que las sumas de los elementos de sus subconjuntos sean todas diferentes.

Problema 15. Todo conjunto de diez enteros entre 1 y 99, ambos inclusive, tiene dos subconjuntos disjuntos diferentes cuyas sumas de elementos son iguales.

Problema 16. En todo conjunto de enteros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ siempre se puede encontrar un subconjunto cuya suma de elementos es divisible entre n.

Problema 17. Muestre que todo número entero tiene un múltiplo cuya representación en base 10 sólo tiene los dígitos 0 y 1.

Problema 18. (OM 1993/3) Dentro de un pentágono de área 1993 se encuentran 995 puntos. Considere estos puntos junto con los vértices del pentágono. Muestre que de todos los triángulos que se pueden formar con 3 de los 1000 puntos como vértices hay al menos uno de área menor o igual a 1.

Problema 19. (IMO, 1985/4) Se tienen 1985 enteros positivos tales que ninguno tiene un divisor primo mayor que 23. Muestre que hay 4 de ellos cuyo producto es la cuarta potencia de un entero.

Problema 20. Seis puntos son tales que las distancias entre ellos son todas diferentes. Considere todos los triángulos que tengan vértices dentro de esos seis puntos. Muestre que el lado más grande de uno de los triángulos es al mismo tiempo el lado más corto de otro de los triángulos.