# Principio extremo: máximos y mínimos

## 1. Ejemplos

En algunos problemas, para hacer algunas demostraciones, puede resultar de mucha ayuda considerar máximos y mínimos valores de ciertas cosas. A veces incluso se puede usar para mostrar que un resultado es cierto procediendo por contradicción. A continuación, algunos ejemplos (la parte en donde se utiliza el principio extremo se marca en negritas):

i) Hay $n \geq 3$ puntos dados en el plano. Cada tres de ellos determinan un triángulo de área a lo más 1. Muestra que todos los puntos se encuentran dentro de un triángulo de área a lo más 4.

**Solución.**
Consideremos tres puntos $A$, $B$ y $C$ entre los $n$ puntos dados que determinan un triángulo con la **máxima área posible**. Sea $l_A$ la recta paralela a $BC$. Vemos que no hay un punto $D$ más allá de esa recta, ya que si lo hubiera, su distancia a $BC$ sería mayor que la de $A$, por lo que $DBC$ sería un triángulo con área mayor, contradicción.

Ahora definimos las rectas $l_B$, $l_C$ de forma análoga y definimos $K = l_B \cap l_C$, $L = l_A \cap l_C$ y $M = l_A \cap l_B$. Usando arguméntos análogos a los mostrados anteriormente, podemos concluir que todos los puntos se encuentran dentro del triángulo $KLM$. Para finalizar, observemos que este último tiene área a lo más 4, ya que el triángulo $ABC$ es el formado por los puntos medios de los lados de $KLM$, y entonces el área de $KLM$ es 4 veces el área de $ABC$.

ii) Sea $n$ un entero positivo, y sea $W = \ldots x_{-1}x_0x_1x_2\ldots$ una palabra periódica infinita, que consiste únicamente de letras $a$ y/o $b$. Supón que el periodo mínimo $N$ de $W$ es mayor que $2^n$.

Se dice que una palabra finita $U$ *aparece* en $W$ si existen índices $k \leq \ell$ tales que $U = x_k x_{k+1} \ldots x_\ell$. Una palabra finita $U$ se dice *ubicua* si todas las palabras $Ua$, $Ub$, $aU$, y $bU$ aparecen en $W$. Muestra que hay al menos $n$ palabras ubicuas diferentes.

**Solución.**
Para cada palabra $R$ de longitud $m$, a la cantidad de índices $i \in 1, 2, \ldots, N$ para los cuales $R$ coincide con la sub-palabra $x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i+m}$ de $W$ la llamamamos la *multiplicidad* de $R$ y se denota por $\mu(R)$. Entonces una palabra $R$ aparece en $W$ si y sólo si $\mu(R) > 0$. Como cada ocurrencia de una palabra en $W$ es sucedida por la letra $a$ o la $b$, y también precedida por alguna de esas letras, se tiene

$$\mu(R) = \mu(Ra) + \mu(Rb) = \mu(aR) + \mu(bR) \qquad (1)$$

para todas las palabras $R$.

Afirmamos que la condición de que $N$ es el mínimo periodo de $W$ garantiza que cada palabra de longitud $N$ tiene multiplicidad 1 o 0 dependiendo de si aparece o no. En efecto, si las palabras $x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i+N}$ y $x_{j+1}\ldots x_{j+N}$ son iguales para algunos $1 \leq i < j \leq N$, entonces $x_{i+a} = x_{j+a}$ para cada entero $a$, así que $j - i$ es un periodo más chico.

Más aún, como $N > 2n$, al menos una de las palabras $a$ y $b$ tiene una multiplicidad que es estrictamente mayor que $2n-1$.

Para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sea $U_k$ una sub-palabra de $W$ cuya multiplicidad es estrictamente mayor que $2^k$ y **cuya longitud es la máxima posible**. Esa palabra existe por las observaciones hecha en los párrafos anteriores.

Fijemos un índice $k \in 0, 1, \ldots, n-1$. Como la palabra $U_k b$ es mayor que $U_k$, su multiplicidad es a lo más $2^k$, por lo que en particular $\mu(U_k b) < \mu(U_k)$. Entonces, la palabra $U_k a$ tiene que aparecer, por (1). Por una razón análoga, las palabras $U_k b$, $aU_k$, y $bU_k$ tienen que aparecer también. Así, la palabra $U_k$ es ubicua. Más aún, si la multiplicidad de $U_k$ fuera estrictamente mayor que $2^{k+1}$, entonces por (1) al menos una de las dos palabras $U_k a$ y $U_k b$ tendría multiplicidad mayor que $2^k$, lo que contradiría la maximalidad de $U_k$.

Así que tenemos $\mu(U_0) \leq 2 < \mu(U_1) \leq 4 < \ldots \leq 2n-1 < \mu(U_n - 1)$, lo que implica en particular que las palabras $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ son distintas. Además, son ubicuas, por lo que podemos concluir.

## 2. Problemas

Llegó el momento de poner en prática el método del principio extremo. A continuación algunos problemas:

1. Se dice que un subconjunto $B$ de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$ tiene la propiedad $T$ si cada tres elementos de $B$ son los lados de un triángulo no degenerado. Encuentra la máxima cantidad de elementos que puede tener un conjunto con la propiedad $T$.

2. Muestra que no existe ninguna cuadrupla $x$, $y$, $z$, $u$ de enteros positivos que satisfaga $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.

3. En cada casilla de un tablero de ajedrez infinito se ha escrito un entero positivo. Se sabe que cada número escrito es la media aritmética de sus 4 vecinos. Muestra que todos los números son iguales.

4. Se tienen $2n$ puntos en el plano, $n$ rojos y $n$ azules. Muestra que es posible repartir los puntos en $n$ parejas de puntos de distintos color, de tal forma que al conectarlos con segmentos no haya dos que se intersecten.

5. Se tienen $3n$ puntos (no hay tres colineales) en el plano: $n$ son azules, $n$ blancos y $n$ rojos. Cada punto se conecta con un segmento con otros $n+1$ puntos, de color distinto al primero. Muestra que se forma al menos un triángulo cuyos tres vértices son de colores distintos.

6. En una fiesta con $n$ personas, se sabe que entre cualesquiera 4 personas, hay o bien 3 personas que se conocen entre sí o bien 3 personas, tales que ningún par entre ellas se conoce. Muestra que las $n$ personas se pueden separar en dos salones, de tal forma que en uno todos se conocen y en el otro nadie conoce a nadie.

7. Se tienen $n \geq 3$ puntos en el plano. Muestra que todos son colineales, o existe al menos una recta que pasa por exactamente dos de ellos.

8. Encuentra todos los enteros positivos $n$ tales que, al escribir los números del 1 al $n$ en orden, en notación decimal, el número resultante es capicúa.

## 3. Hints

1. Considera los dos elementos **más pequeños** del conjunto.

2. Procede por contradicción: considera una solución que **minimiza la suma** $x+y+z+u$.

3. Considera el **número más chico** que se ha escrito. ¿Por qué esto no funciona si los números que se escriben no son necesariamente enteros positivos?

4. Considera la **menor suma de longitudes** de segmentos posible, entre todos los emparejamientos.

5. Considera el punto que está conectado a **la mayor cantidad de puntos** de algún color.

6. Considera la **mayor cantidad de personas** que se pueden colocar en un salón de forma que todas se conozcan entre sí.

7. Procede por contradicción: Supón que no se cumple ninguno de los dos casos y fíjate en todas las rectas que pasan por al menos dos de los puntos. Considera **la menor distancia posible** entre uno de los puntos ($P$) y una de tales rectas ($l$) que no pasa por ese punto. Sea $D$ el pie de la perpendicular de $P$ a $l$. Observa que $D$ divide a $l$ en dos semirrectas así que hay al menos dos puntos en alguna de ellas.

8. Prodece por contradicción: considera la **máxima longitud posible** de una cadena de $0's$ en la representación decimal del número resultante. Entre esas cadenas de $0's$ de longitud máxima, considera la que está **más a la derecha**.