Principios de Invarianza y Extremal

Entrenamiento #1 Rumbo al Nacional
8-11 de octubre de 2015
Por: Clemente

Resumen

Bienvenido de vuelta a Combi, el área menos querida por las "bacas". Supongo que ya se extrañaba esta área fea con F de Favela, sino pues ni modo. El tema de la semana involucra ideas que probablemente ya hallas manejado de manera inconciente o no tan inconciente, pero ahora te las presentamos para que las tengas siempre en mente. Espero que este tema te guste más, pues considero que no es tan feo como separadores y el PIC. Como soy un hombre de pocas palabras, pase usted y póngase cómodo, que la combi nos hace un 2x1.

1. Principio Extremal

Si de casualidad te diste cuenta de que en el título puse primero Principio de Invarianza, pero estoy iniciando por Principio Extremal, me alegro. Si te preguntas por qué, pues porque soy hipster.

Bueno, ahora si sobre el Principio Extremal. También es conocido como el principio extremo o metodo variacional y suele llevar a soluciones considerablemente cortas, claro, si lo usas bien.

Supongamos problemas en los que puedas ordenar los elementos en él. Una vez ordenados dichos elementos, analiza que pasa en los casos extremos (duh), o sea, en el caso más pequeño y/o en el caso más grande. También pudieran ser el caso mas feo y el mas bonito. Simple, ¿no? Pues en esencia si, pero en ocasiones no habrán elementos que ordenar tal cual. En estos casos suelen ser funciones las que se tienen que analizar. Desde el punto de vista de funciones, los casos extremos son valores que maximizan o minimizan la función.

Pero simplemente decir como funciona algo nunca ha sido suficiente para hacerte del conocimiento. Por eso te presentaré un ejemplo. Espero sea suficientemente ilustrativo.

1.1. Ejemplo de principio extremal para un conjunto ordenable

En un entrenamiento de matemáticas hay 6 estudiantes, quienes después de un arduo día de trabajo se sientan formando un círculo. Su astucia matemática les hace darse cuenta de que la edad de cualquiera de ellos es igual al promedio de las edades de los dos vecinos que tiene dicha persona. Prueba que todos tienen la misma edad.

Solución: Ordenemos a los chamacos según su edad creciente y sean sus edades $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, con $e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4 \leq e_5 \leq e_6$ (dicho orden no tiene nada que ver con cómo se van a sentar en el círculo). Ahora, pensemos en el estudiante más joven, e_1 debe ser el promedio de e_i y e_j, con $i \neq j$, para $2 \leq i, j \leq 6$, pero sabemos, suponiendo que $e_i \leq e_j$, que $e_i \leq \frac{e_i+e_j}{2} \leq e_j$, lo cual es equivalente a $e_i \leq e_1 \leq e_j$ y esto solo se cumple si $e_i = e_1 = e_j$. ¡Ya llevamos que tres estudiantes tienen la misma edad! Para los últimos tres el procedimiento es bastante más simple. Se cosidera ahora la edad e_j, sabemos que a un lado tiene la edad e_1 y por el otro e_k, digamos. Es obvio que $e_k = e_j$, pues $e_j = \frac{e_1+e_k}{2}$. De manera análoga para el que está a un lado de e_i. Para el sexto estudiante simplemente se saca el promedio de dos edades iguales a e_1 y pues ya $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6$.

1.2. Ejemplo de principio extremal para una función... O algo así

Se tienen n puntos en el plano. Cuales quiera tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual a 1. Muestra que todos los puntos están contenidos en un triángulo de área menor o igual a 4

Solución: Se toma el triángulo de área máxima menor a igual a 1, el cual llamaremos $\triangle ABC$. A través de sus vértices se trazan paralelas a los lados opuestos del triángulo, formando $\triangle A'B'C'$ (A se encuentra sobre $B'C'$ y análogo para los otros vértices), en otras palabras, trazamos la trifuerza. El área $|\triangle A'B'C'|$ es menor o igual a 4. Para demostrar que todo punto que cumple con las condiciones del problema está dentro de $\triangle A'B'C'$ se toma un punto P fuera de dicho triángulo. P y $\triangle ABC$ estarán de lados distintos de al menos uno de los lados de $\triangle A'B'C'$. Supongamos que uno de estos lados que los separan es $B'C'$. A partir de esto es fácil ver que $|\triangle BCP| > |\triangle ABC|$, ¡Pero eso es una contradicción! (porque inicialmente se dijo que $\triangle ABC$ tiene área máxima). Por lo cual P no cumple con las condiciones del problema y $\triangle A'B'C'$ contiene a los n puntos.

Si te preguntas dónde quedó la función, pues fue el área del triángulo $\triangle ABC$. Si no captas cómo es que ésto es una función, pues te diré que una función puede ser casi cualquier cosa, sólo ocupas imaginación y que dicha función te sea útil. Ahora que si no te hayas con el punto de vista de funciones, no te preocupes, pues: a) en la solución no se mencionó tal cual la función y b) más adelante te vas a familiarizar más con éstas.

2. Invarianza

El Principio de Invarianza consiste en que en un problema, preferentemente dinamico (o sea, donde cambian cosas), busques algo que no cambie, algo que permanezca invariante. Simple, ¿no? Pues de hecho, si. Probablemente es una estrategia que en alguna ocasión ya hayas utilizado en tu vida olímpica, ojala y si, pues así será más simple esto. Ahora, hay que considerar lo siguiente: no siempre es sencillo encontrar una situación invariante en un problema. Para esto a veces requieres pensar en paridad, a veces requieres módulos, a veces coloración. Pero si la logras encontrar, pues te simplificarás mucho el problema.

Es importante que te des cuenta de que este princpio está muy presente en las soluciones de los problemas de juegos, coloración y en los que aplicas una transformación; básicamente en cualquier problema que tengas un proceso repetitivo. Además, siempre recuerda que cuando encuentras la invarianza en el problema, ¡todavia no acabas! La invarianza te acorta el camino, pero te deja siempre a dos que tres pasitos del final, así que no te confíes.

2.1. Ejemplo

Un círculo está dividido en seis sectores. Los números 1, 0, 1, 0, 0, 0 están escritos en los sectores (en sentido contrario a las manecillas del reloj). Una movida consiste en escoger dos sectores adyacentes y sumarle 1 a sus números. Será posible igualar todos los números utilizando una cantidad finita de movidas?

Solución 1: Vamos a colorear el círculo con dos colores, alternando blanco y rojo (como Umbrella Corporation) y digamos que S_1 es la suma de los sectores blancos y S_2 la suma de los sectores rojos. Inicialmente $S_1 = 2$ y $S_2 = 0$. Cuando haces una movida, le sumas 1 tanto a S_1 como a S_2, por lo cual $S_1 = S_2 + 2$ y nunca podrán ser iguales. Como las sumas nunca serán iguales, nunca serán iguales todos los números.

Solución 2: Denominemos como $a_1, \dots, a_6$ los números en los sectores. Entonces $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ debe ser 0 si todos los sectores tienen el mismo número. Inicialmente $I = 2$ y después de cualquier movida I se mantiene constante (¿por qué?) y distinto de 0, por lo tanto los sectores nunca tendrán todos los mismos números.

¿Notaron lo importante? La "cosa" invariante fue que la suma de los sectores rojos es dos unidades menor que la de los blancos.

3. Agregados culturales

1. Para el que no lo sepa, Umbrella Corporation es la compañía malvada detras de todas las pestes zombies que azotan el planeta en los videojuegos de Resident Evil.

2. Es la segunda lista de combi que hago y no me gusta mucho en lo particular la combi.

3.

4. Recomendaciones

1. En extremal, al inicio de cada problema pregúntate "¿qué puedo máximizar o minímizar?". A partir de ahí sigue tu camino.

2. En invarianza, digamos que cada que repetimos el proceso del problema, vamos de un estado a otro. Te recomiendo que consideres lo siguiente:

   a) A partir de un estado inicial, ¿puedo llegar un estado en partícular?
   b) Encuentra todos los estados a los que puedes llegar a partir de un estado inicial.
   c) Después de aplicar el proceso una cantidad finita de veces, sin importar el estado inicial, ¿llego siempre al mismo estado final?
   d) Busca si al aplicar el proceso, se crean ciclos, ¡como en módulos!

5. Problemas

5.1. Principio Extremal

1. Sea $n \geq 100$ un entero. Tenemos n manzanas distribuidas en algunas canastas. Nosotros podemos quitar canastas y podemos quitar manzanas de las canastas. Encuentra el menor entero m tal que si $n \geq m$ entonces siempre es posible tener la misma cantidad de manzanas en cada canasta, de manera que tengamos 100 manzanas en total.

2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ enteros tales que $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{20} < 100$. Se define la sucesión $\{b_i\}$ como $b_i = a_{i+1} - a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, 19$. Prueba que hay al menos tres números iguales en la sucesión $\{b_i)\}$.

3. Desde cualquier punto O dentro de un polígono convexo dibujamos los segmentos perpendiculares a sus lados. Demuestra que al menos un pie de las perpendiculares está dentro del lado correspondiente (y no sobre la prolongación del lado).

4. Hay $2n$ puntos en el plano, tales que cualesquiera 3 no son colineales. Exactamente n de estos puntos son granjas, y los n puntos restantes son pozos. Se desea construir un camino recto que una cada granja con un pozo. Demuestra que se puede hacer esto, tal que ningún par de caminos se corten entre sí.

5. Hay $n \geq 5$ puntos en el plano. Todos los puntos se colorean ya sea de rojo o de verde. Se sabe que no hay tres puntos colineales del mismo color. Prueba que hay un triángulo tal que sus tres vértices son del mismo color y que al menos uno de los lados no contiene un punto del otro color.

6. Hay n puntos dados en el plano. Cualesquiera tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual a 1. Demuestra que los n puntos están dentro de un triángulo de área menor o igual a 4.

7. Prueba que siempre se pueden escoger tres diagonales de un pentagono convexo de manera que estas sean lados de un triangulo.

8. Hay $2n + 3$ puntos en el plano. Se sabe que no hay 3 puntos que sean colineales y tampoco hay 4 puntos que sean concíclicos. Prueba que podemos dibujar un círculo que pase por 3 puntos de tal manera que n puntos queden dentro del círculo y n queden fuera de el.

9. Sea $n \geq 3$ un entero. Se tienen n líneas en el plano, tales que no hay 2 que sean paralelas y no hay 3 que concurran en el mismo punto. Estas n líneas dividen al plano en varias regiones. Prueba que siempre hay una region triangular adyacente a cualquier línea.

10. Un tablero de 10×10 se llena con los números del 1 al 100, uno en cada casilla. Prueba que hay dos casillas adyacentes (que comparten un lado) tales que la diferencia de sus números es mayor que 10.

11. En un tablero de $n \times n$ se colocan fichas en sus casillas. Se sabe que si nos fijamos en una casilla vacía, entonces el total de fichas que hay en la fila y en la columna de esa casilla vacía es mayor o igual a n. Prueba que el total de fichas que hay en el tablero es mayor o igual a $\frac{n^2}{2}$.

12. Determina todos los conjuntos finitos S que tengan al menos tres puntos en el plano y que cumplan con la siguiente propiedad: para cualesquiera dos puntos distintos A y B de S, la mediatriz del segmento AB es un eje de simetra de S.

13. Demuestra que todo poliedro convexo tiene al menos dos caras con la misma cantidad de lados.

14. **(Un problema alterado)** $2n + 1$ personas se sitúan en el plano de manera que todas las distancias entre las personas son distintas. Todas las personas disparan a su vecino mas cercano. Demuestra que:

    a) Al menos una persona sobrevive.

    b) Nadie recibe mas de cinco balazos.

    c) Los caminos que recorren las balas nunca se cruzan,

    d) El conjunto de los segmentos formados por los caminos de las balas no contiene ningún poligono cerrado.

15. En un planeta distante, existen sólo 20 países. Entre cualesquiera tres países hay dos que no tienen relaciones diplomáticas. Demuestra que en dicho planeta hay a lo más 200 embajadas.

16. Every participant of a tournament plays with every other participant exactly once. No game is a draw. After the tounament, every player makes a list with the names of all players, who (a) were beaten by him and (b) were beaten by the players beaten by him. Prove that the list of some player contains the names of all other players.

17. Consider a walk in the plane according to the following rules. From a given point P(x, y)we may move in one step to one of the four points $U(x, y + 2x)$, $D(x, y - 2x)$, $L(x - 2y, y)$, $R(x + 2y, y)$ with the restriction that we cannot retrace a step we just made. Prove that, if we start from the point $(1, \sqrt{2})$, we cannot return to this point any more (HMO 1990).

18. Among any 15 coprime positive integers $1 < a_i \leq 1992$, $1 \leq i \leq 15$. There is at least one prime.

19. n points are given in a plane.We label the midpoints of all segments with endpoints in these n points. Prove that there are at least $(2n - 3)$ distinct labeled points.

20. Six circles have a common pointA. Prove that there is one among these circles which contains the center of another circle.

21. We choose n points on a circle and draw all chords joining these n points. Find the number of parts into which the circular disk is cut.

22. A set S of persons has the following property. Any two with the same number of friends in S have no common friends in S. Prove that there is a person in S with exactly one friend in S.

23. The sum of several nonnegative reals is 3, and the sum of their squares is ¿1. Prove that you may choose three of these numbers with sum ¿1.

24. mchips (m ¿n) are placed at the vertices of a convex n-gon. In one move, two chips at a vertex are moved in opposite directions to neighboring vertices. Prove that, if the original distribution is restored after some moves, then the number of moves is a multiple of n.

25. It is known that the numbers $a_1, ..., a_n$ and $b_1, ..., b_n$ are both permutations of $1, 1/2, ..., 1/n$. In addition, we know that $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq ... \geq a_n + b_n$. Prove that $a_m + b_m \leq 4/m$ for all m from 1 to n.

5.2. Principio de Invarianza

26. Hay 11 números escritos en el pizarrón: seis 0's y cinco 1's. Una movida consiste en escoger dos números del pizarrón, borrarlos y escribir 0 si eran iguales o 1 si eran distintos. Despues de hacer varias movidas, queda solo un número. ¿De qué número se trata?

27. Cada uno de los numeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es -1 o +1. Si $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0$, prueba que $4|n$.

28. En el parlamento de Finicia, cada miembro tiene a lo más tres enemigos. Prueba que el parlamento puede separarse en dos grupos, de manera que cada miembro tenga a lo más un enemigo en su propio grupo.

29. Considera un tablero de ajedrez de 8×8. (a) ¿Será posible conseguir sólo un cuadrito negro, si sólo se pueden invertir los colores de los cuadritos de toda una fila o toda una columna? (b) ¿Será posible conseguir sólo un cuadrito negro, si sólo se pueden invertir los colores de los cuadritos de un cuadro de 2×2?

30. Una operación consiste en tomar el primer dígito de izquierda a derecha de un entero positivo, eliminarlo y sumarle al número restante dicho número. Considera el numero 7^{2015}. A este número se le aplica sucesivamente la operación hasta que quede un número de 10 dígitos. Prueba que el número restante tiene al menos dos dígitos iguales.

31. Un auditorio está inicialmente vacío. A partir de cierto momento, cada minuto que pasa, o entra 1 persona al auditorio o 2 personas salen de él. Cuando pasan exactamente 3^{2012} minutos, ¿puede en el auditorio haber $3^{1000} + 2$ personas?

32. Denotemos por $S(n)$ a la suma de los dígitos de n. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n + S(n) + S(S(n)) = 2012$.

33. Voldemort, el Mago de las Tinieblas, ha decidido guardar una de las Reliquias de la Muerte en un lugar seguro. Por ello, ha creado un baúl encantado, cuya cerradura consiste en un tablero de 4×4, el cual tiene en cada una de sus 16 casillas una figura de serpiente que sólo pueden estar en posicion vertical u horizontal. La cerradura tiene la peculiaridad de que si cambiamos una de las serpientes de posicion (de vertical a horizontal, o viceversa), entonces todas las serpientes que estan en la misma fila y en la misma columna cambian también de posición. Si todas las serpientes se encuentran en posición vertical, entonces el baúl se abre. Encuentra una configuración de la cerradura para que el baúl de Voldemort no pueda ser abierto nunca.

34. Un círculo está dividido en 2000 sectores. Hay 2001 ranas en estos sectores.Cada segundo, dos ranas que se encuentren en el mismo sector saltarán a sectores vecinos opuestos. Prueba que, en algun momento, habrá al menos 1001 sectores vacíos.

35. ¿Es posible acomodar los numeros $1, 1, 2, 2, \ldots, 2010, 2010$ en una fila, de manera que halla exactamente $x - 1$ numeros entre dos x?

36. En cada vértice de un pentágono hay un entero, de manera que la suma de los 5 números es positiva. Si tres vértices consecutivos tienen los números x, y, z respectivamente con $y < 0$, entonces se puede realizar la siguiente operación: los números x, y, z se reemplazan por $x + y, y, z + y$, respectivamente. Esta operación se realiza repetidamente mientras halla un número negativo en el pentagono. Determina si este proceso se podrá terminar depués de un número finito de operaciones.

37. Around a circle, 5 ones and 4 zeros are arranged in any order. Then between any two equal digits, you write 0 and between different digits 1. Finally, the original digits are wiped out. If this process is repeated indefinitely, you can never get 9 zeros.

38. There is a positive integer in each square of a rectangular table. In each move, you may double each number in a row or subtract 1 from each number of a column. Prove that you can reach a table of zeros by a sequence of these permitted moves.

39. Each of the numbers 1 to 10^6 is repeatedly replaced by its digital sum until we reach 10^6 one-digit numbers. Will these have more 1's or 2's?

40. The vertices of an n-gon are labeled by real numbers $x_1, \dots, x_n$. Let a, b, c, d be four successive labels. If $(a-d)(b-c) < 0$, then we may switch b with c. Decide if this switching operation can be performed infinitely often.

41. In the next figure, you may switch the signs of all numbers of a row, column, or a parallel to one of the diagonals. In particular, you may switch the sign of each corner square. Prove that at least one -1 will remain in the table.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

42. There is a row of 1000 integers. There is a second row below, which is constructed as follows. Under each number a of the first row, there is a positive integer $f(a)$ such that $f(a)$ equals the number of occurrences of a in the first row. In the same way, we get the 3rd row from the 2nd row, and so on. Prove that, finally, one of the rows is identical to the next row.

43. There is a checker at point $(1, 1)$ of the lattice (x, y) with x, y positive integers. It moves as follows. At any move it may double one coordinate, or it may subtract the smaller coordinate from the larger . Which points of the lattice can the checker reach?

44. Each term in a sequence $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ starting with the seventh is the sum of the last 6 terms mod 10. Prove that the sequence $\dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ never occurs.

45. The integers $1, \dots, 2n$ are arranged in any order on $2n$ places numbered $1, \dots, 2n$. Now we add its place number to each integer. Prove that there are two among the sums which have the same remainder mod 2n.

46. Assume a convex 2m-gon $A_1, \dots, A_{2m}$. In its interior we choose a point P, which does not lie on any diagonal. Show that P lies inside an even number of triangles with vertices among $A_1, \dots, A_{2m}$.

47. n numbers are written on a blackboard. In one step you may erase any two of the numbers, say a and b, and write, instead $\frac{a+b}{4}$. Repeating this step $n-1$ times, there is one number left. Prove that, initially, if there were n ones on the board, at the end, a number, which is not less than $\frac{1}{n}$ will remain.

48. Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be a permutation of $1, 2, \dots, n$. If n is odd, then the product $P = (a_1-1)(a_2-2)\dots(a_n-n)$ is even. Prove this.

49. Many handshakes are exchanged at a big international congress. We call a person an odd person if he has exchanged an odd number of handshakes. Otherwise he will be called an even person. Show that, at any moment, there is an even number of odd persons.

50. The integers $1, \dots, n$ are arranged in any order. In one step you may switch any two neighboring integers. Prove that you can never reach the initial order after an odd number of steps.