Principios de combinatiora

Entrenamiento #3 para 3ª etapa
19-25 de marzo de 2016
Por: Lulú

Resumen

En este documento podrás encontrar la información necesaria para poder resolver problemas básicos de combinatoria (sí, reciclé esta parte del documento). En esta ocasión no es tan necesario que se sepa álgebra, ya que no se resolverán ecuaciones. El dominio aquí es de la aritmética y operaciones básicas. Así que no eres bueno haciendo cuentitas, lo lamento; no está permitido usar calculadoras.

Además del material necesario para resolver problemas básicos de combinatoria, podrás encontrar ejercicios (situaciones rápidas y sencillas para que apliques y comprendas mejor los conceptos) y una lista de problemas (sí, también reciclé esta parte). Aquí aprenderás el principio multiplicativo y aditivo y otras cositas chéveres de combinatoria.

1. Un pequeño preámbulo

Si la preguntas a la Wikipedia qué es la combinatoria, te va a decir que "es una rama de la matemática que estudia la enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones que satisfacen ciertas considiciones establecidas". Si te queda perfectamente claro, te felicito. Pero para usar términos un poco más amigables, diremos que la combinatoria es la rama de la matemática que habla de los conjuntos, sus propiedades y arreglos.

No estudio matemáticas, así que no tienes por qué hacerme mucho caso en ello. Pero, no importa tanto que sepan qué es la "combi" (como normalmente le llamamos), sino que aprendas a hacer problemas de combinatoria. Y antes de empezar les daré unas pequeñas definiciones:

Conjunto Es un montón de cosas. Es como una categoría o clasificación. Los animales, los números pares, los alumnos en este salón son todos ejemplos de conjuntos.

Subconjunto Es un conjunto más pequeño que se encuentra adentro de otro. Utilizando los mismos ejemplos anteriores: las aves, los animales de África, los cuadrúpedos, todos son ejemplos de subconjuntos del conjunto "animales"; los múltiplos de cuatro, son un ejemplo de subconjunto para el conjunto "números pares"; las alumnas de este salón, o los Jaguares en el aula son dos ejemplos distintos de subconjuntos para el conjunto "alumnos en este salón".

Elemento Es cada uno de los componentes de un conjunto. Cada elemento es un subconjunto por sí mismo, pero ya no puede subdividirse.

Conjunto vacío Es un conjunto que consiste de nada. En serio, vilmente es considerar la existencia de una categoría en la que no hay nada.

Combinación Es un arreglo. Se define por los elementos que lo forman, indistinto del orden.

Permutación Es un tipo de arreglo que se define por los elementos que lo forman y el orden en el que aparecen. Es como una combinación pero "revuelta".

$n!$ Se lee "ene factorial" y significa la multiplicación de todos los números enteros positivos desde el 1 hasta n. De ese modo $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2. Cómo contar

Así se dice, y obviamente no me refiero a que digan "uno, dos, tres, cuatro". Me refiero a la cantidad de arreglos para una situación determinada. Si sabes calcularlo de manera correcta, sabes contar. Dentro de las técnicas de conteo tendrás que aprender:

1. El principio multiplicativo
2. El principio aditivo
3. Permutaciones
4. Combinaciones
5. Otras cosas más jarcors y chiduris que podrás aprender si terminas esta lista

2.1. El principio multiplicativo

Normalmente se utiliza en situaciones en las que cada caso es independiente y no niega la posibilidad de otros de los sucesos. Mi ejemplo favorito son los semáforos. Aunque no me gusta tanto como para poner imágenes. Supongamos el escenario en el que vamos manejando alegremente por el bulevar. Entonces, nos toparemos con un gran número de semáforos.

Cuando lleguemos a un semáforo puede tocarnos en rojo, amarillo o verde. Y para cada uno de los tres colores no se define nada en el segundo semáforo, donde de nuevo puede que nos toque llegar en verde, en amarillo o en rojo. ¿Qué opciones tenemos?

1. Si el primer semáforo está en rojo
   a) El segundo está en rojo
   b) El segundo está en amarillo
   c) El segundo está en verde
2. Si el primer semáforo está en amarillo
   a) El segundo está en rojo
   b) El segundo está en amarillo
   c) El segundo está en verde
3. Si el primer semáforo está en verde
   a) El segundo está en rojo
   b) El segundo está en amarillo
   c) El segundo está en verde

No era necesario enumerar todo, pero quizá sea más fácil de ver que cada caso del primer semáforo puede tener los tres casos del segundo. De ese modo, el resultado es $3 \times 3 = 9$. Así funciona el principio multiplicativo. Si el segundo semáforo tuviera cuatro luces diferentes, la cantidad de casos sería $3 \times 4 = 12$ bajo la misma idea. Y para un tercer semáforo de tres luces, las opciones son $3 \times 4 \times 3 = 36$.

Si no queda muy claro, siempre tienes derecho y permiso de solicitarle a tu entrenador que te haga dibujitos. Diagramas de árbol, conexiones entre ciudades, un montón de semáforos. Todas son opciones viables. Sin embargo, para una situación que se hace en diferentes etapas, ya sabemos que la multiplicación de casos en cada etapa es lo que nos da la formulita:

$$m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$$

2.2. El principio aditivo

Hay veces en las que se tienen situaciones en las que no podemos juntar todo. Simplemente se consideran casos aparte. Por ejemplo, si se tiene un conjunto gigante de personas de los que quieren elegir tres del mismo género para pagarles un viaje a Bora Bora o algún lugar igual de exclusivo y privilegiado, se deben considerar los casos en que son sólo mujeres y los casos en que sólo son hombres.

Si en el ejemplo hubiera (no importa cómo: sólo estoy inventando) 38 maneras de que fueran mujeres y 22 maneras de que fueran hombres, entonces hay un total de $22 + 38 = 60$ maneras de hacerlo. Pero, si además de eso, la compañía de viajes dijera que podría pagar el viaje a los perros de estas personas, con la condición de que sólo vayan perros, tendría que considerarse ese otro caso. De modo que si hay 15 formas de mandar tres perros, la cantidad total de arreglos es $22 + 38 + 15 = 75$. Y así nos podríamos seguir.

Espero que haya sido claro. Si no, para eso tienen entrenadores frente a ustedes, para terminar de aclarar las dudas. Y ya para concluir con esto del principio aditivo: para un número n de casos aparte (no se me ocurre cómo más decirlo) la cantidad total de casos es

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

2.3. Permutaciones

Supongamos el escenario en el que una palabra es un conjunto de letras que no se repiten. Pero las mismas letras en un orden distinto es una palabra distinta. Y que, además, las palabras de k letras sólo pueden tener las primeras k letras del abecedario. Bajo estas premisas, la primer palabra que se puede formar es

$$a$$

.
Pero para la siguiente palabra podemos colocar la b tanto a la derecha como a la izquierda. Siendo las siguientes palabras

$$\{ba, ab\}$$

Pero para cada uno de los dos casos, la tercer letra se puede insertar al inicio de la palabra, en el medio o al final. Por ejemplo: para ba se tiene $\_b\_a\_$, donde hemos de elegir sólo uno de los guiones bajos como el espacio en donde habrá de colocarse la letra c. Entonces, ¿cuántas palabras diferentes podemos formar con k letras? Si tu respuesta es $k!$, estás en lo correcto. Si tu respuesta respuesta no es esa, te reto a que demuestres o averigües por qué.

¿Y si no tuviéramos la restricción de seguir el orden alfabético? ¿Y si quisiera que la primera letra que se coloca fuera la L? Bueno, considerando que nuestro abecedario tiene 27 letras, ¿cuántas formas tenemos de elegir la primera de las letras de la palabra (es decir, la que va hasta la izquierda)? Pues, 27. Y si todas las letras en la palabra deben ser diferentes, ¿cuántas opciones tengo para la segunda letra? 26.

Pequeño ejercicio: ¿Cuántas palabras de 5 letras hay? ¿De 7? ¿De k letras (con $k < 27$)?

Por favor, antes de seguir intenta realizar el ejercicio ese. Seguro te topaste con algo así como un $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ para cinco, o con un $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ para siete. Siendo así, debiste haber obtenido que para k es algo como $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdots (27 - (k - 1))$. Entonces, si en vez de tener un abecedario de 27 letras se tuviera uno de n letras, las cuentas se parecerían más a:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

¿Se te ocurre alguna forma más bonita de expresar eso? Si no, entonces te soplaré una: multipliquemos y dividamos por $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdots 2 \cdot 1$. De ese modo, se llega a la expresión siguiente:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Antes que nada, y en mi defensa, quiero comentar que lo que hice fue completamente legal porque multiplicar y dividir por una misma cosa debe dar el mismo resultado (ya que $x/x = 1$ y al final sólo multiplicamos por una fracción que vale 1). Entonces, sólo se hace eso para manipular la expresión con otras cosas y llegar a una expresión diferente de la misma cosa.

2.4. Combinaciones

Si alguien llega y me regala un chocolate, una galleta y un pedazo de pizza, no importa en qué orden me los coma porque todos son deliciosos y porque me lo terminaré comiendo de cualquier modo. Si habláramos del orden, serían permutaciones y podría hacerlo de las siguiente maneras:

1. *cgp*
2. *cpg*
3. *gcp*
4. *gpc*
5. *pcg*
6. *pgc*

Como ya les dije, con un mismo arreglo se pueden tener permutaciones y combinaciones, pero si m es la cantidad de formas en las que se puede permutar el mismo arreglo, debería ser claro que hay la cantidad de combinaciones es m veces menor.

Pequeño ejercicio: ¿Cuál es el valor de esa m?

Pensemos en un viaje a París con gastos pagos y todo bien chido. Participan 15 personas, pero sólo se pueden ir 4. ¿Cómo eliges a los ganadores? El primero, puede ser cualquier de los quince; el segundo (dado que el mismo cuate no puede ganar dos veces), es uno de los catorce restantes; el tercero debe ser uno de los trece restantes; y el último ganador tiene que estar en las otras doce personas. Pero, si ganan Pedro, María, Lupita y José en ese orden, ¿no sería lo mismo a que ganaran María, José, Pedro y Lupita o que ganaran Lupita, María, José y Pedro?

A esto se le conoce como **casos repetidos**. Como pueden imaginarse cada combinación o arreglo de personas, puede permutarse de manera que el orden en que salieron victoriosos cambia. Pero sólo nos importa quiénes se van, y dado que tomarán el avión al mismo tiempo, tampoco importa en qué orden fueron anunciados ganadores. Con la misma lógica que en el problema de las palabras, podemos ver que cada arreglo se repite $4! = 24$ veces. Quizá aquí sea más fácil encontrar el valor de la m.

La cantidad de formas de elegir un subconjunto de k elementos dentro de un conjunto de n, se escribe normalmente como

$$\binom{n}{k}$$

Ésto se lee como "ene en ka". Y para acabar la teoría, te invito a demostrar lo siguiente:
Reto: Demuestra que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

3. Ejercicios

1. Una persona tiene 4 camisas, 6 pantalones, 5 pares de calcetines y 2 pares de zapatos. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?
2. Se quiere escoger un libro de entre 3 materias: matemáticas, historia y biología. Hay 6 libros de Matemática, 9 de Historia y 4 de Biología. ¿Cuántas opciones para escoger un libro tenemos?
3. ¿Cuántos números enteros de tres o menos cifras hay?
4. ¿Cuántas palabras de 3 letras pueden hacerse con un alfabeto de 3 letras distintas?
5. ¿Cuántas placas distintas hay con dos letras a la izquierda y tres números a la derecha? Considera que el alfabeto que usamos tiene 27 letras y los números son del 0 al 9.
6. De la ciudad A a la ciudad B hay 5 caminos y de la ciudad B a la ciudad C hay 29 caminos. ¿Cuántos caminos hay de A a C, pasando siempre por B?
7. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar, si el primer dígito (de izquierda a derecha) debe ser impar y el último dígito debe ser par?
8. Se tienen 6 banderas de señalización: dos rojas, dos verdes y dos azules. ¿Cuántes señales distintas pueden hacerse con una o dos banderas a la vez, considerando que banderas del mismo color son idénticas)?
9. Dos sociedades deportivas tienen 20 esgrimistas cada una. Si hay que elegir a 3 de entre las dos sociedades, ¿de cuántas maneras puede hacerse?
10. ¿De cuántas formas se pueden sentar cinco personas en cinco sillas numeradas del uno al cinco?
11. De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite uno de 3 museos. ¿Cuántas comisiones distintas pueden hacerse?
12. En una competencia de matemáticas participan 50 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los primeros tres lugares?
13. ¿De cuántas formas se puede elegir un grupo de 3 personas entre un grupo total de 10?
14. Juan quiere pintar su cuarto de dos colores diferentes y tiene pintura blanca, negra, gris, azul y verde. ¿Cuántas opciones tiene para pintar su cuarto?

4. Agregados culturales

1. A la expresión $\binom{n}{k}$ también se le conoce como **coeficiente binomial**.
2. A Ricardo le gusta explicar teoremas de combinatoria con galletas. Si se puede con galletas reales, es mejor.
3. Afortunadamente para ustedes, el examen de segunda etapa no tenía una situación de **casos repetidos**.
4. A veces se utiliza también un punto central para indicar que estás multiplicando, en vez de usar la $\times$. Por eso, se puede escribir que $3 \cdot 4 = 12$ y no hay problema. Eso es para evitar confundirnos con la incógnita x.
5. El agregado cultural anterior es una añadido a un agregado de la lista pasada.
6. Normalmente se escribe $\{a_1, a_2, \cdots\ a_n\}$ para denotar un conjunto cuyos elementos son los que se encuentran entre las llaves.
7. En años anteriores se asignaban símbolos químicos a las personas que asistían a entrenamientos. Pregunta por el símbolo de tu entrenador favorito (o del más guapo).

8. Las vacas no tienen cuatro estómagos, sino uno. Pero está dividido en cuatro cámaras distintas: redecilla, rumen, libro y cuajar.

5. Lista de problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 números, entre el 1 y el 100, tal que la suma sea par?
2. Si tenemos dos conjuntos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, ¿cuántas parejas de la forma (a_i, b_j) se pueden formar?
3. Demuestra la Fórmula de Pascal (también llamada Triángulo de Pascal):
$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$
4. Demuestra el binomio de Newton:
$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n$$
5. Demuestra de dos maneras distintas que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
6. ¿De cuántas maneras se pueden colocar ocho torres en un tablero de ajedrez de manera que no se ataquen entre ellas?
7. Para una baraja de póquer, ¿de cuántas maneras se puede obtener:
   a) exactamente un par?
   b) exactamente una tercia?
   c) exactamente dos pares?
   d) una corrida?
   e) una flor?
   f) una flor corrida?
   g) un full-house?
   h) un póquer?
   i) una flor imperial?
   j) una “Pachuca Imperial”? (Luis Carlos)
   k) una mano (la que sea)?
8. En una canasta hay 12 manzanas y 10 naranjas. Iván toma de la canasta una manzana o una naranja, luego Nadia elige una manzana y una naranja. ¿En qué caso tiene más opciones Nadia, cuando Iván toma la manzana o la naranja?
9. En una reunión deben intervenir 5 personas: A, B, C, D y E.
   a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores, con la condición de que B no debe intervenir antes que A?
   b) Lo mismo, pero con la condición de que A debe intervenir inmediatamente antes que B.

10. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?
11. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 personas alrededor de una mesa redonda?
12. ¿Cuántos números de 6 cifras existen, tal que al menos una de sus cifras sea par?
13. Se marcan diez puntos en una hoja de papel, de manera que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma línea. ¿Cuántos triángulos con vértices en estos puntos se pueden dibujar?
14. Encuentra la cantidad de números de cuatro dígitos $abca$ que sean múltiplos de 11
15. Un número de tres cifras es "equilibrado" si una de sus cifras es el promedio de las otras dos. ¿Cuántos números equilibrados de tres cifras hay?
16. ¿Cuál es el máximo números de regiones en las que n líneas pueden dividir al plano?
17. Se tiene una cuadrícula de 8×8. ¿cuántos caminos hay de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha si no se permite caminar hacia la izquierda y no se vale pasar dos veces por el mismo lugar?
18. En una reunión hay 28 matrimonios. Cada persona estrecha la mano de algunas de las restantes (nunca la de su cónyuge). Al final, el señor Suárez pregunta a cada uno de los presentes cuántas manos estrechó, y todos le responden un número distinto. ¿Cuántas manos estrechó el señor Suárez?

6. Problemas más jarcors

1. ¿Cuántos divisores tiene un entero positivo n? Considera el Teorema Fundamental de la Aritmética.
2. ¿Cuántos números entre 1 y 2012 tienen exactamente 6 divisores positivos?
3. Demuestra que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$
4. En una cuadrícula de $m \times n$, una araña empieza desde la esquina superior izquierda. Si debe moverse por las aristas de la cuadrícula y sólo hacia la derecha o hacia abajo (por lo que no puede pasar por el mismo punto dos veces, ni retroceder), ¿cuántas formas distintas tiene la araña para llegar a la esquina opuesta?