Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 4 de septiembre del 2022

Principios de Conteo

José Eduardo Payán Sosa

1 Introducción.

En los diversos concursos de matemáticas, varios de los problemas que se van a encontrar los alumnos involucran contar el número de objetos (números, palabras, caminos, etc.) que tenga cierto conjunto, por ejemplo

Ejemplo 1.1. ¿Cuantas manzanas hay en la siguiente imagen?

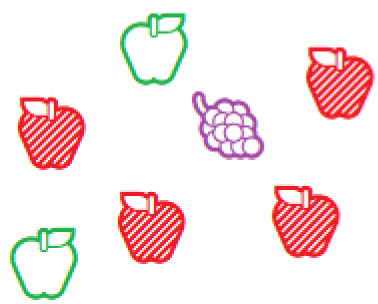


Figure 1: (Son seis manzanas)

Contar es fundamentalmente asignar números enteros de forma consecutiva a los elementos de un conjunto (o enumerar) para determinar su cantidad. Es decir ir $1, 2, 3, \ldots$ asignando números a los objetos y el número en el que terminas es el número de objetos, sin embargo para que la asignación nos sirva para contar, se requieren ciertos simples requisitos:

1. Empezar del 1, no saltarse números y no repetir números.

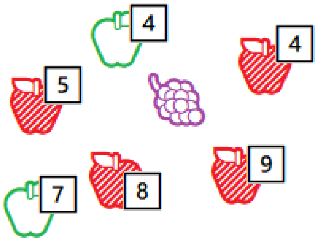
2. Enumerar solo los elementos que se quieren contar.

3. Enumerar todos los elementos a contar.

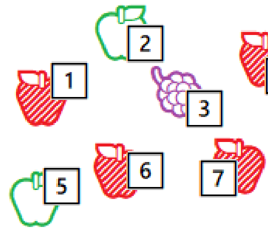
4. No repetir elementos a contar.

El punto 1 nos asegura que estamos numerando los objetos con los números del 1 a n y que cada número lo usamos exactamente una vez, el punto 2 nos asegura que solo estamos contando los objetos que queremos, el punto 3 nos asegura que estamos contando todos los objetos y el punto 4 nos asegura que no estamos contando el mismo objeto varias veces.

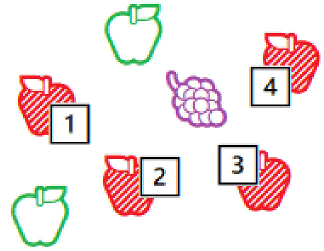
A la hora de resolver problemas contando de forma directa, es necesario verificar que la numeración que usada cumple con los requisitos anteriores para asegurar que la respuesta es correcta, especialmente cuando se pida acompañar la respuesta con su justificación. Para explicar los puntos 1 y 4 usualmente solo basta con escribir la numeración usada (como por ejemplo en una lista) y de ahí se puede ver que se empezó del 1, no se saltearon números, no se repitieron números y no se contó el mismo objeto dos veces. Otra forma valida de explicar los puntos 1 y 4 es simplemente escribir de forma individual todos los elementos y decir cuántos son. Sin embargo, los puntos 2 y 3 los tendremos que explicar de forma individual si no está claro por el procedimiento usado, es decir, debemos decir por que contamos todos los objetos y no contamos de cosas de más. Veamos el siguiente ejemplo.



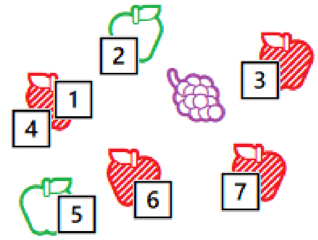
(a) Conteo que no cumple 1



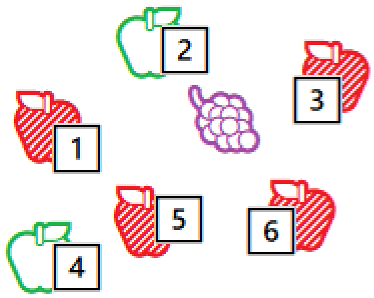
(b) Conteo que no cumple 2



(c) Conteo que no cumple 3



(d) Conteo que no cumple 4



(e) Conteo que cumple con los cuatro requisitos

Figure 2: (te dije que eran seis)

Ejemplo 1.2. ¿Cuantos pares hay del 0 al 10 (inclusive)?

Sol. Son 6 pares y son 0, 2, 4, 6, 8 y 10.

Todos son pares pues son el producto de 2 con los números 0, 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. Además todos están entre 0 y 10 inclusive.

Por ultimo como par + 1 = impar y impar + 1 = par, los pares van de dos en dos y el resto de los números en ese rango son impares. □

En la solución anterior, el primer párrafo nos dice cuales son los elementos que se contaron y cuantos son. El hecho de que se contó de forma correcta y que no se repiten elementos es evidencia suficiente de que se siguieron los puntos 1 y 4. El segundo párrafo nos muestra que todos los elementos contados cumplen las condiciones del problema, es decir se cumple 2. Por ultimo el tercer párrafo nos muestra que no nos falto algún numero de contar (pues el resto es impar) por lo que se cumple con 3.

1.1 Biyecciones.[1]

Con lo anterior en mente, ¿Como identificarías que dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos?, ¿Se te ocurre una forma distinta a contar los elementos de ambos conjuntos?. Hacer esto es posible si podemos "emparejar" los elementos de cada conjunto con elementos del otro. Es decir, supongamos que queremos ver si los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos, si podemos asignarle a cada elemento de A un elemento de B de tal forma que se cumpla

1. Todos los elementos de A están asignados con exactamente un elemento.

2. Los elementos en A están asignados con elementos en B (no hay ninguno que está asignado con un elemento que no esté en B).

3. Cada elemento de B está asignado con algún elemento en A.

[1] El lector puede saltarse este tema si lo desea.

4. No hay elemento en B que ha sido asignado con dos elementos en A.

entonces por cada elemento de A hay exactamente un elemento en B y ambos conjuntos van a tener la misma cantidad de elementos. De hecho si la asignación cumple con los puntos 1, 2 y 3 nos dice que A tiene una cantidad de elementos mayor o igual a la cantidad de elementos en B y si la asignación cumple con 1, 2 y 4, entonces A tiene una cantidad de elementos menor o igual a la cantidad de elementos en B.

Para los que estén más interesados en el tema, los primeros dos puntos nos dicen que la asignación es lo que se llama una *función* con dominio A y codominio B (o simplemente una función de A a B). Una función que cumple con el punto 3 se dice que es *sobreyectiva* y una función que cumple con el punto 4 se dice que es *inyectiva*. Una función que es inyectiva y sobreyectiva se dice que es *biyectiva* (o que es una *biyección*).

Es probable que te hayas dado cuenta de que los cuatro puntos anteriores se asemejan a los cuatro puntos que dimos anteriormente para una numeración. Esto no es coincidencia, pues justamente a la hora enumerar los elementos de un conjunto para contarlos lo que estamos haciendo es decir que hay la misma cantidad de elementos que números del 1 al n.

Por ultimo, nos gustaría notar que los puntos 3 y 4 se pueden intercambiar por "Cada elemento de B está asignado con *exactamente* un elemento en A."

Usemos lo visto para resolver el siguiente ejercicio

Ejemplo 1.3. Trevor y sus 100 amigos quieren formar un equipo de 100 personas para elaborar un proyecto. Si no importa el orden de los integrantes del equipo, ¿De cuantas formas distintas pueden formar el equipo?

Sol. Queremos elegir 100 integrantes de 101 personas sin importar el orden. Afirmamos que esto se puede hacer de la misma cantidad de formas que elegir una persona que *no* sea integrante de las 101 personas.

Efectivamente, por cada forma de elegir a los 100 integrantes, tenemos exactamente una forma de elegir al no integrante. Recíprocamente, cada forma de elegir al no integrante nos da exactamente una forma de elegir al los 100 integrantes.

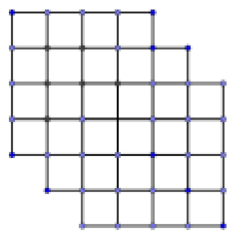
Como claramente hay 101 formas de elegir a una persona del grupo de 101 amigos, concluimos que el número de formas de elegir a los integrantes del equipo es igual a 101. $\square$

1.2 Problemas.

Problema 1.1. Da una numeración que cumpla con las cuatro condiciones anteriores para los siguientes conjuntos y di cuantos son.

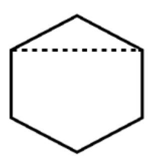
1. Los números del 10 al 25 (inclusive)
2. Las diagonales de un hexágono regular
3. Maneras de acomodar a Ana, Beto, Carlos y David en una fila.
4. Los números mayores a 10 y menores a 1000 que terminan en 5 (no tienes que escribirlos todos, busca un patrón y explícalo)
5. Los impares del 1 al 100 (busca una formula)

Problema 1.2. ¿Cuántos cuadrados de área 9 hay en la siguiente figura? El área de cada cuadradito es 1.



Problema 1.3. ¿Cuántos números entre 1990 y 2020 tienen sus cuatro dígitos distintos?

Problema 1.4. Un lado falso en un polígono regular es una diagonal que une dos vértices que estén separados un vértice. Por ejemplo, en la figura se muestra marcado con una linea punteada un lado falso del hexágono. ¿Cuántos lados falsos tiene un polígono de 2018 lados?



Problema 1.5. Luis Carlos tiene 5 manzanas y 2 peras. Va a ordenar estas 7 frutas en una fila con la única condición que entre las dos peras no puede haber una manzana. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Problema 1.6. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger tres números del 1 al 9, no necesariamente distintos de modo que su suma sea igual a 22? Nota: Escoger 6, 7 y 8 es lo mismo que escoger estos números en cualquier otro orden.

2 Principio aditivo.

Como se podrán imaginar contar de forma directa no es practico para varios problemas, por ejemplo aquellos que tenga que contar una gran cantidad de objetos; por lo que es importante conocer herramientas para agilizar el proceso. Para motivar la primer herramienta que vamos a ver, considera el siguiente problema

Ejemplo 2.1. José compró en la tienda manzanas rojas y verdes. Si compró 4 manzanas rojas y 2 manzanas verdes, ¿Cuantas manzanas compró en total?

La respuesta se obtiene de manera sencilla haciendo la suma $4+2$ (son seis), después de todo, la suma se inventó para resolver este tipo de problemas, pero vamos a usar este ejemplo para ilustrar un hecho importante y es que existe una numeración de todas las manzanas que cumple con los cuatro requisitos de la sección anterior que usa los números del 1 al 6. Efectivamente, uno puede por ejemplo contar con los números del 1 al 4 las cuatro manzanas (de la misma forma que contamos que eran cuatro) y después contar a partir del 5 las manzanas verdes (en el mismo orden en el que se contaron originalmente) tal como se ilustra en la imagen 3. Como se cuentan 2 números después del 4, la cuenta va a terminar en el número $4+2=6$.

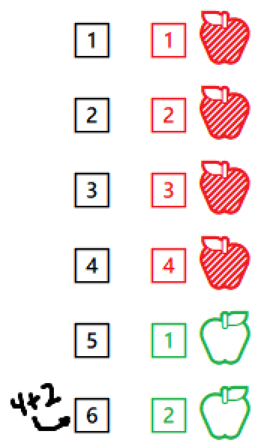


Figure 3: (Son $4+2$ manzanas)

Vamos a ver que dicha numeración cumple con los requisitos de la sección anterior. Por construcción se cumple el requisito 1, pues se comienza desde el 1 y no se saltean ni repiten números; para que se cumpla 2 se requiere que los elementos contados ya sea en el 4 o en el 2 sean todos manzanas; para el criterio 3 se necesita que todas las manzanas hayan sido contadas ya sea en el 4 o en el 2; y por ultimo, para que se cumpla el criterio 4 se requiere que no haya ninguna manzana se haya contado en el 4 y en el 2.

Considerando lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Principio aditivo)**.** *Si un conjunto P se puede partir en dos conjuntos A y B con a y b elementos respectivamente, tales que*

- *todos los elementos de A y B son elementos de P,*
- *todos los elementos de P están en A o en B*
- *y los conjuntos A y B no tienen elementos en común.*

entonces P tiene $a+b$ elementos.

En el ejemplo anterior, el conjunto P son todas las manzanas, el conjunto A son las manzanas rojas y el conjunto B las verdes. El primer punto se cumple pues todos los elementos de A y B son manzanas, el segundo pues todas las manzanas son verdes o rojas y el tercer punto se cumple pues no hay manzana que sea roja y verde a la vez.

Tal como se podrán imaginar, el principio aditivo se puede usar cuando el conjunto a contar se parte en más de dos conjuntos. Dejamos al lector (ese eres tú) como ejercicio demostrar la versión general del principio aditivo usando la versión dada en el Teorema 2.1 (Pista: usa el principio de inducción)

Consideremos ahora el siguiente problema

Ejemplo 2.2. Pedro escribe los números del 1 al 100 (incluyendo el 1 y el 100) en su cuaderno, luego borró todos los pares y por último borró todos los múltiplos de 3. ¿Cuantos números borró?

Sol. Agrupamos los números del 1 al 100 en parejas de la siguiente forma $(1,2),(3,4),(5,6),\ldots(99,100)$. Cada pareja tiene exactamente un par y un impar, por lo que el número de pares (y el de impares) es el mismo que el número de parejas, las cuales son $100/2 = 50$.

Para contar los múltiplos de 3, agrupamos los números del 1 al 99 en tercias $(1,2,3),(4,5,6),\ldots(97,98,99)$. De nuevo, cada pareja tiene un múltiplo de 3 por lo que hay $99/3 = 33$ múltiplos de 3 del 1 al 99; como 100 no es múltiplo de 3, hay 33 múltiplos de 3 del 1 al 100.

Por el principio aditivo, Pedro borró $50 + 33 = 83$ números. □

¿Notaste el error en la solución anterior? Exacto, ¡estamos contando los múltiplos de 6 (los números $6, 12, 18, \ldots$) dos veces!, es decir, no se cumple el tercer punto que pide el principio aditivo. Una solución correcta sería por ejemplo

Sol.

...

Para contar los impares múltiplos de 3, agrupamos los impares del 1 al 95 en tercias $(1,3,5),(7,9,11),\ldots(91,93,95)$ De nuevo, cada pareja tiene un múltiplo de 3 (¿por qué?) así que hay $48/3 = 16$ impares múltiplos de 3 del 1 al 95; como 97 no es múltiplo de 3 y 99 si lo es, hay 17 impares múltiplos de 3 del 1 al 100.

Por el principio aditivo, Pedro borró $50 + 17 = 67$ números. □

Tal como vimos en el ejemplo anterior, a pesar de que el principio aditivo es bastante simple, a la hora de usarlo es importante verificar que se cumplen con los tres requisitos para asegurarnos que el resultado es correcto. A la hora de escribir una solución usando el principio aditivo es importante que en el procedimiento sea claro que se cumplen los tres puntos. Esto normalmente se puede hacer simplemente explicando que es cada conjunto. Por ejemplo en el problema anterior el conjunto que queremos contar es el de números borrados por Pedro y la partición esta dada por los pares (que son 50) y los impares múltiplos de tres (que son 17), con esta información los tres puntos del principio aditivo son evidentes

- ¿Por qué los 50 pares y 17 impares múltiplos de tres fueron borrados por Pedro? *R.* Porque Pedro borró los pares y los múltiplos de 3.

- ¿Por qué los números que borro Pedro están ya sea en los 50 pares o en los 17 impares múltiplos de tres? *R.* Porque si Pedro borró un número este es ya sea par o de lo contrario un impar múltiplo de tres.

- ¿Por qué los 50 pares y los 17 impares múltiplos de tres no tienen elementos en común? *R.* Porque los 50 son pares y los 17 impares.

Por ultimo, el principio aditivo nos sirve para separar un problema de contar un conjunto complejo en dos (o tres, cuatro, etc) conjuntos más sencillos. Esto se conoce como separar por casos.

Ejemplo 2.3. Reynaldo y Sofía están jugando a multiplicar números, primero Reynaldo elige un número del 1 al 6 (inclusive), luego Sofía elige un número del 1 al 100 (inclusive) y por ultimo ambos multiplican los dos números que eligieron. ¿Cuantas parejas de números pueden elegir los dos de tal forma que el producto sea múltiplo de 6?

Sol. Separaremos el problema en casos, dependiendo del número que elige Reynaldo:

- Reynaldo elige 1 o 5. Notemos que Reynaldo no eligió ni un múltiplo de 3 ni un par, por lo que en este caso Sofía tiene que elegir un múltiplo de 6. Agrupamos los números del 1 al 96 en grupos de 6 de la forma $(1, 2, 3, 4, 5, 6), (7, 8, 9, 10, 11, 12), \ldots (91, 92, 93, 94, 95, 96)$, cada grupo tiene exactamente un múltiplo de 6, luego hay $96/6 = 16$ múltiplos de 6 del 1 al 96; como 97, 98, 99 y 100 no son múltiplos de 6, concluimos que hay 16 múltiplos de 6 del 1 al 100. Hay 16 parejas con producto múltiplo de 6 donde Reynaldo elige 1 y 16 parejas donde Reynaldo elige 5.

- Reynaldo elige 2 o 4. Como Reynaldo eligió un múltiplo de 2 pero no de 3, Sofía debe elegir un múltiplo de 3. Como hay 33 múltiplos de 3 del 1 al 100 (ver la sol incorrecta del ejemplo 2.2), hay 33 parejas de con producto múltiplo de 6 donde Reynaldo elige 2 y 33 parejas donde elige 4.

- Reynaldo elige 3. Como Reynaldo eligió un múltiplo de 3 pero no de 2, Sofía debe elegir un múltiplo de 2. Hay 50 pares que Sofía pudo haber elegido, por lo que hay 50 parejas producto múltiplo de 6 donde Reynaldo elige 3.

- Reynaldo elige 6. En este caso, sin importar que número elija Sofía, el producto será múltiplo de 6, por lo que hay 100 parejas producto múltiplo de 6 donde Reynaldo elige 6.

Por el principio aditivo, hay en total $16 + 16 + 33 + 33 + 50 + 100 = 248$ parejas con producto múltiplo de 6 □

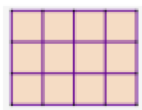
2.1 Problemas.

Problema 2.1. Emily vive en una calle donde las casas están numeradas del 1 al 45. Un día recorre toda la calle viendo hacia las casas y salta cada vez que mira un número 2. ¿Cuántas veces salta Emily?

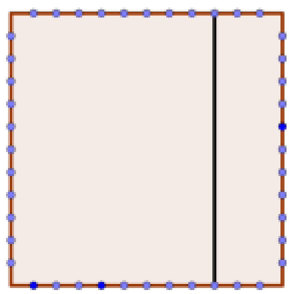
Problema 2.2. Juan elige un número del 1 al 4 (incluyendo al 1 y 4), luego Pedro elige un número del 1 al 2022 (incluyendo el 1 y el 2022) y suma su número con el de Juan. ¿Cuantas parejas distintas pueden elegir Juan y Pedro para que la suma sea un múltiplo de 5?

Problema 2.3. ¿Cuántos números de dos dígitos (como 23 o 76) cumplen que el dígito de sus decenas es mayor al número de su unidades? Por ejemplo, 36 no cumple pues 3 es menor que 6.

Problema 2.4. ¿Cuántos rectángulos que tengan una cantidad impar de cuadraditos de 1x1 se pueden encontrar dentro del siguiente rectángulo de 3x4?



Problema 2.5. Sobre cada uno de los lados de un cuadrado se han marcado 11 puntos como se muestra en la figura. ¿Cuántos líneas con extremos sobre estos puntos son paralelos a algún lado o a alguna diagonal del cuadrado? Por ejemplo, el segmento marcado es uno de ellos.



Problema 2.6. Se tiene una cuadrícula de 5×5 cuyo cuadrado central está coloreado de rojo. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar usando algunos de los cuadrados unitarios de la cuadrícula, que contienen el cuadrado rojo?

3 Principio multiplicativo.

Ejemplo 3.1. En una heladería venden nieve de vainilla, chocolate o combinado cubierto de alguna de las cuatro coberturas disponibles, que son cacahuate, chispas, granola y galleta. ¿Cuantos combinaciones de helados con cobertura distintos se pueden comprar en esa tienda?

Sol. Dividiremos en casos de acuerdo con el sabor del helado

- Helado de vainilla. En este caso, hay cuatro cubiertas disponibles (cacahuate, chispas, granola y galleta). Hay 4 combinaciones de helados que usan el sabor de vainilla.

- Helado de chocolate. Igual que en el punto anterior hay 4 coberturas disponibles. Por lo que hay 4 combinaciones de helados que usan el sabor de chocolate.

- Helado combinado. De nuevo hay 4 coberturas disponibles así que son 4 combinaciones que usan nieve combinada.

Por el principio aditivo, hay $4+4+4 = 3 \cdot 4 = 12$ combinaciones de helado con cobertura. □

Es común que en problemas de conteo el conjunto a contar se pueda partir en varios casos con la misma cantidad de elementos, tal como fue el caso en el ejemplo anterior. En estas situaciones se puede hacer directamente el producto de el número de casos con el número de elementos en cada caso en lugar de desarrollar cada caso siempre y cuando los casos no tengan elementos en común y no nos falte ningún elemento por considerar. A esto le llamamos el principio multiplicativo.

Teorema 3.1 (Principio multiplicativo)**.** *Si por cada forma de elegir uno de los a elementos de un conjunto A hay b formas distintas de elegir un elemento en P (tales que todo elemento de P está en alguna de las b formas para algún elemento de A) entonces hay ab elementos en P*

Otra forma más común de pensar el principio multiplicativo es que si hay a formas de elegir una acción y por cada una de esas formas hay b formas de elegir una segunda acción, entonces hay ab formas de elegir las dos acciones.

Resolvamos el problema anterior usando el principio multiplicativo.

Sol. Notemos que por cada forma de elegir uno de los tres sabores de helado hay cuatro formas de elegir la cobertura, por el principio multiplicativo hay $3 \cdot 4 = 12$ formas de elegir el helado y la cobertura. □

Al igual que en el principio aditivo, el principio multiplicativo se puede expandir a más de dos acciones.

Un detalle importante a la hora de usar el principio multiplicativo es verificar que el número de formas de elegir la segunda acción es la misma sin importar cual acción se tomo en la primera elección, por ejemplo si en el problema anterior no se permite que se elija cacahuate cuando se eligió chocolate entonces no se puede usar de forma directa el principio multiplicativo (pues después de elegir vainilla o combinado hay 4 formas de elegir la cubierta pero si se elige chocolate son solo 3) por lo que se tendrá que considerar el chocolate en un caso separado.

Con lo anterior en mente, consideremos el siguiente problema.

Ejemplo 3.2. ¿Cuantos números de tres dígitos no tienen dos dígitos consecutivos iguales?

Sol. Notemos que el primer dígito (el de las centenas) solo puede ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 (pues si fuera 0 el número no sería de tres dígitos).

Por cada una de las 9 opciones del primer dígito hay 9 opciones para el segundo dígito (el de las decenas), pues puede ser cualquier número del 1 al 10 salvo por el número que se eligió en el primer dígito, para que no tengamos dos números consecutivos.

De la misma forma, por cada elección del primero y segundo dígito hay 9 formas de elegir el ultimo dígito (el de las unidades), pues de nuevo puede ser cualquier número del 1 al 10 salvo por el número que se eligió en el segundo dígito.

Por el principio multiplicativo, hay $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ números de tres dígitos que no tienen dos dígitos consecutivos iguales. □

Después de leer la solución anterior quizá te hayas dado cuenta que las opciones para el segundo dígito dependen de lo que se eligió en el primero, es decir si eliges 1 en el primer dígito las opciones para el segundo dígito son distintas a si eliges, por ejemplo 2 (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 vs. 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Pero espera, ¿no dije que era necesario que las formas de elegir la segunda acción sean las mismas? **¡No!** lo único importante para usar el principio multiplicativo es que la *cantidad* de formas sea la misma. Si bien las opciones cambian según lo elegido en el primer dígito, siempre van a ser la misma cantidad y eso es lo importante a la hora de usar el principio multiplicativo.

Es muy común encontrarse con problemas en los cuales se tenga que usar el principio aditivo para separar en casos y el principio multiplicativo para contar cada caso. Por ejemplo, considera el siguiente problema.

Ejemplo 3.3. Reynaldo y Sofía están jugando a multiplicar números, primero Reynaldo elige un número del 1 al 100 (inclusive), luego Sofía elige un número también del 1 al 100 (inclusive). Por ultimo ambos multiplican los dos números que eligieron. ¿Cuantas parejas de números pueden elegir los dos de tal forma que el producto sea múltiplo de 6?

Sol. Separaremos el problema en casos, dependiendo del número que elige Reynaldo, pero primero notemos que si agrupamos los números del 1 al 96 en 16 grupos de 6 de la forma $(1,2,3,4,5,6), (7,8,9,10,11,12), \ldots (91,92,9$ cada grupo tiene exactamente un múltiplo de 6, dos impares que no son múltiplos de tres, dos pares que no son múltiplos de tres y un impar múltiplo de tres. Contando al 97, 98, 99 y al 100, tenemos que hay 16 múltiplos de 6, 33 impares no múltiplos de tres, 34 pares no múltiplos de tres y 17 impares no múltiplos de tres (y por lo tanto 50 pares y 33 múltiplos de tres). Ahora, separamos por casos

- Reynaldo elige un número impar que no sea múltiplo de tres. En este caso Sofía tiene que elegir un múltiplo de 6. Por el principio multiplicativo hay $33 \cdot 16 = 528$ parejas con producto múltiplo de 6 en las que Reynaldo eligió un impar no múltiplo de tres.

- Reynaldo elige un par no múltiplo de tres. Sofía debe elegir un múltiplo de 3. Por el principio multiplicativo hay $34 \cdot 33 = 1122$ parejas con producto múltiplo de seis en las que Reynaldo eligió un par no múltiplo de tres.

- Reynaldo elige un impar múltiplo de tres. Ahora Sofía debe elegir un múltiplo de 2. Por el principio multiplicativo, este caso tiene $17 \cdot 50 = 850$ elementos.

- Reynaldo elige múltiplo de 6. En este caso, sin importar que número elija Sofía, el producto será múltiplo de 6. Hay $16 \cdot 100 = 1600$ elementos en este caso.

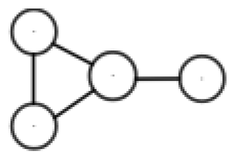
Por el principio aditivo, hay en total $528 + 1122 + 850 + 1600 = 4100$ parejas con producto múltiplo de 6. □

3.1 Problemas.

Problema 3.1. La familia de Andre saldrá de vacaciones y pueden elegir una playa de entre 4 playas de Yucatán o 5 de Quintana Roo . Si cada playa de Yucatán tiene 3 hoteles disponibles y cada playa de Quintana Roo tiene dos hoteles disponibles, ¿cuántas opciones tiene su familia para vacacionar?

Problema 3.2. Una persona va a una zapatería en la que hay sólo 3 modelos de tenis de su talla y 5 modelos de zapatos de su talla, cada modelo de tenis viene en 4 colores diferentes y cada modelo de zapato viene en 2 colores diferentes. ¿De cuántas formas puede elegir calzado esta persona?

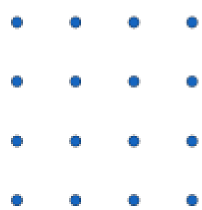
Problema 3.3. Los siguientes círculos quieren colorearse de verde, azul o rojo con la condición de que dos círculos que estén conectados por una línea tengan colores distintos. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

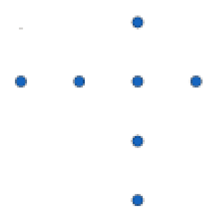


Problema 3.4. ¿Qué hay más, números capicúas de 5 o de 6 dígitos? Nota. Un número capicúa es un número que se lee igual de izquierda derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 9, 121 y 1001 son capicúas.

Problema 3.5. Ciertas horas del día le gustan a Germán. Le gustan aquellas que muestran los dígitos 1,2,3 y 4 en algún orden en su reloj de 24 horas (del 00:00 al 23:59). Por ejemplo 23: 41 le gusta pero 11:23 no, pues no muestra el 4. ¿Cuántas horas del día le gustan a Germán?

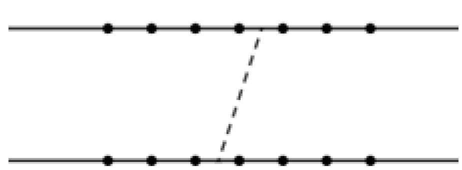
Problema 3.6. Se tiene una colección de puntos como la siguiente pero con 2019 puntos por lado, en lugar de 4. ¿Cuántas cruces como la siguiente puedes encontrar en la colección de 2019 $\times$ 2019 puntos? Nota. Sí se consideran distintas dos cruces si están rotadas.





Problema 3.7. En una escuela se tienen 8 salones. Cuatro de ellos tienen capacidad para 20 alumnos; dos de ellos para 15 alumnos y dos de ellos para 25. Hay seis grupos los cuales tienen 10, 12, 16, 22 y 24 alumnos. ¿De cuántas maneras se le puede asignar un salón a cada grupo?

Problema 3.8. Las siguientes líneas son paralelas y sobre cada una de ellas se han marcado 7 puntos. ¿Cuántos segmentos con extremos sobre los puntos marcados, cortan al segmento punteado del dibujo?



Problema 3.9. Isaac tiene tareas de español, matemáticas, geografía, historia y biología, las tareas de español y matemáticas las entrega el lunes, las de geografía e historia el jueves y la de biología el viernes. Si Isaac hace una tarea por día empezando por el sábado, ¿de cuántas maneras puede organizarse para entregar todas sus tareas a tiempo? (Nota. Puede hacer la tarea el mismo día que se entrega)

Problema 3.10 (OMMEB 2018 NI E.4)**.** Sergio y Zael quieren ir a una heladería a comprar un tipo de helado cada día de la semana. Dentro de los artículos que se venden se encuentran los siguientes: paletas, raspados y sándwich de nieve. Además, de cada uno de los artículos hay 4 sabores: vainilla, fresa, chocolate y limón. Sergio quiere comprar un artículo de chocolate por día de manera que no coma lo mismo dos días seguidos, mientras que Zael quiere comprar paletas de distintos sabores sin comer dos días seguidos el mismo sabor. ¿Quién de los dos tiene más formas distintas de comprar a lo largo de toda la semana? Justifica tu respuesta.

Problema 3.11 (OMMEB 2017 NII I.14)**.** Un entero positivo se dice balanceado si todos sus dígitos aparecen la misma cantidad de veces. Por ejemplo, 1234, 101022 y 777 son números balanceados. Encuentra la cantidad de números balanceados menores a 10^4.

Problema 3.12 (OMMEB 2017 NI I.4)**.** Dada la lista de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 una sublista se forma tomando al menos un número de la lista y ordenados de menor a mayor, por ejemplo 1, 2, 8 es una sublista. Encuentra la cantidad de sublistas en las que ninguno de los números 2, 3, 5 o 7 aparecen.

Problema 3.13. Las ciudades de Nápoles, Venecia, Roma y Florencia están unidas entre ellas. A cada dos de ellas las unen 7 caminos diferentes. ¿De cuántas formas se puede ir de Venecia a Florencia sin pasar dos veces por la misma ciudad?

Problema 3.14 (OMMEB 2018 NI I.11)**.** En una pared está escrita la palabra YUCATAN con letras de metal. Al menos una de las letras se cayó, pero no se cayeron todas. ¿Cuántas palabras distintas pueden haber quedado escritas en la pared, sin considerar los espacios vacíos? Por ejemplo, si se cayeron la C y la T, queda YUAAN.