Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 2

Productos Notables

En muchas ocasiones tendremos que resolver multiplicaciones algebraicas para llegar a la solución de problemas en la olimpiada. Algunas de estas operaciones aparecerán habitualmente, y para simplificar los cálculos, podemos diferenciar algunas de estas operaciones.

De esta manera, se le llama *producto notable* a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. Existen varios tipos de productos notables. A continuación, se enlistan los más importantes.

Nombre	Operación	Descripción
Factor común	$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$	El resultado de multiplicar un binomio a+b por un término c aplicando la propiedad distributiva.
Cuadrado de un binomio	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Multiplicar por si mismo un binomio (dos términos). Se suman los cuadrados de cada término y se suma o se resta el doble producto de ambos.
Binomios conjugados	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Cuando se tienen los mismos dos términos, pero donde en uno se aplica la operación suma y en el otro la operación resta. Se elevan al cuadrado y se restan.
Cuadrado de un trinomio	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$	De forma similar al binomio al cuadrado, se suman los cuadrados de los términos y el doble de la suma de todas las posibles parejas. Esto es extensivo

		para más de tres términos
Cubo de un binomio	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Una fórmula similar al binomio al cubo es un caso más del Binomio de Newton.
Suma y diferencia de cubos	**Adición de cubos:** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ **Diferencia de cubos:** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Una identidad que se ve más como un método de factorización, sin embargo, es también interesante verla como producto notable. Se puede generalizar.
Suma y diferencia de potencias enésimas	**Suma de potencias enésimas:** **Si –sólo si–** *n* es impar, $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$ **Diferencia de potencias enésimas:** $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$	Es la generalización de la suma y diferencia de cubos.

Además de los productos notables (y cabe resaltar que hay más), existen algunas identidades que valen la pena resaltar. Se enlistan a continuación.

20 **Preliminares**

Ejercicio 1.22 *Para todos los números reales x, y, se tienen las siguientes identidades de segundo grado:*

(i) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x-y)^2 + 2xy$.

(ii) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$.

(iii) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.

(iv) $x^2 + y^2 + xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x+y)^2}{2}$.

(v) $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x-y)^2}{2}$.

(vi) *Muestre que* $x^2 + y^2 + xy \geq 0$ *y* $x^2 + y^2 - xy \geq 0$.

Ejercicio 1.23 *Para todos los números reales x, y, z, se tiene:*

(i) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \dfrac{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2}{2}$.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$.

(iii) Muestre que $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 0$ y $x^2+y^2+x^2-xy-yz-zx \geq 0$.

Ejercicio 1.24 *Para todos los números reales x, y, z se tienen las siguientes identidades:*

(i) $(xy+yz+zx)(x+y+z) = (x^2y+y^2z+z^2x) + (xy^2+yz^2+zx^2) + 3xyz$.

(ii) $(x+y)(y+z)(z+x) = (x^2y+y^2z+z^2x) + (xy^2+yz^2+zx^2) + 2xyz$.

(iii) $(xy+yz+zx)(x+y+z) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz$.

(iv) $(x-y)(y-z)(z-x) = (xy^2+yz^2+zx^2) - (x^2y+y^2z+z^2x)$.

(v) $(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz = 2z(x-y)^2 + (x+y)(x-z)(y-z)$.

(vi) $xy^2+yz^2+zx^2 - 3xyz = z(x-y)^2 + y(x-z)(y-z)$.

Ejercicio 1.25 *Para todos los números reales x, y, z se tiene:*

(i) $x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)$.

(ii) $xy+yz+zx - \left(x^2+y^2+z^2\right) = (x-y)(y-z) + (y-z)(z-x)$
$+(z-x)(x-y)$.

Ejercicio 1.26 *Para todos los números reales x, y, z se tiene,*

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 2\left[(x-y)(x-z)\right.\\ &\quad \left.+(y-z)(y-x) + (z-x)(z-y)\right].\end{aligned}$$

Fuentes de consulta:

- http://ommags.com/new/wp-content/uploads/2017/06/10-Junio-ManipulaciónAlgebraica-Álgebra.pdf
- http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/CursoEntrenadores2014.pdf
- https://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables
- http://www.ommags.com/material/algebra.pdf
- http://www.matetam.com/blog/entradas-vmp/10-problemas-razonados-algebra-principiantes
- Álgebra. R. Bulajich, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado. 1a Ed. (2014)