PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Daniela Maribel Trancoso Cervantes
Ana del Socorro Viramontes Medina

1. Conceptos

Antes de comenzar con el tema hay que saber varios términos. No es tan importante que se aprendan el nombre de los conceptos, lo que importa es que los entiendan.

Monomio: es una expresión algebraica formada por el producto de un número y de una o más variables. Al número se le llama coeficiente y a las variables con sus exponentes parte literal.

Monomios semejantes: Dos monomios son semejantes si sus partes literales son iguales, es decir, deben contener exactamente las mismas variables elevadas cada una a la misma potencia. Ejemplo de monomios semejantes: $14mz^3x^2\ y - 3mz^3x^2$.

Grado de un monomio: es la suma de los exponentes de las variables del mismo monomio.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$13y^3sx^2$	13	y^3sx^2	6

Polinomio: es una expresión algebraica formada por sumas o diferencias de monomios no semejantes.

Grado de un polinomio: es el mayor exponente que acompaña a alguno de los términos del mismo. Por ejemplo, el polinomio $5x^4 - 13x + 2x^2 + 7$ tiene grado 4.

Polinomio ordenado: Un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados de mayor a menor, es decir, si cada término tiene a su derecha solamente términos de grado (o exponente) menor. Por ejemplo, el polinomio $5x^4 - 2x^2 + 13x + 7$ está ordenado.

Polinomio homogéneo: Se dice que un polinomio es homogéneo cuando el grado de todos sus términos es el mismo. Por ejemplo, $5a^3b^2 - 3a^2b^3 + ab^4$ es un polinomio homogéneo porque el grado de cada término es 5.

Binomio: Polinomio con dos términos.

Trinomio: Polinomio con tres términos.

2. Multiplicación de monomios

Al multiplicar dos monomios, primero se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto está dado por la Ley de los signos.

Ejemplo:

$-xy^2\,(-5mx^4y^3) = 5mx^5y^5$

3. Propiedad distributiva

La propiedad distributiva, es una propiedad que tiene la multiplicación sobre la suma o la resta, la cual resulta muy útil cuando se está multiplicando un número por una suma o una diferencia.

Dadas dos operaciones, multiplicación (×) y suma (+) o resta (−), la propiedad distributiva dice que para todo número real a, b, c se cumple que

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ y } (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

Ejemplos:

$$2(25 - 4) = 2(25) - 2(4) = 50 - 8 = 42$$

$$6(12 + 7) = 6(12) + 6(7) = 72 + 42 = 114$$

Multiplicación de polinomios por monomios

Sea el producto $(a + b)c$.

Multiplicar $(a + b)$ por c equivale a tomar la suma $(a + b)$ como sumando c veces; luego:

$(a + b)c$

$= (a + b) + (a + b) + (a + b) \ldots c$ veces

$= (a + a + a \ldots c\ veces) + (b + b + b \ldots c\ veces)$

$= ac + bc$.

Sea el producto $(a - b)c$.

Tendremos:

$(a - b)c$

$= (a - b) + (a - b) + (a - b) \ldots c$ veces

$= (a + a + a \ldots c\ veces) - \ (b + b + b \ldots c\ veces)$

$= ac - bc$.

Podemos, pues, enunciar la regla para multiplicar un polinomio por un monomio.

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos. Esta es la **propiedad distributiva** de la multiplicación.

Ejemplo:

Multiplicar $3x^2 - 6x + 7$ por $4ax^2$.

$$\begin{aligned}(3x^2 - 6x + 7) \times 4ax^2 &= \ 3x^2(4ax^2) - 6x(4ax^2) + 7(4ax^2) \\ &= \ 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2\end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios por polinomios

Sea el producto $(a + b - c)(m + n)$.

Haciendo $m + n = y$ tendremos:

$(a + b - c)(m + n) = (a + b - c)y = ay + by - cy$

(Sustituyendo y por su valor $m + n$)

$$= a(m + n) + b(m + n) - c(m + n)$$

$$= am + an + bm + bn - cm - cn$$

$$= am + bm - cm + an + bn - cn.$$

Podemos, pues, enunciar la regla para multiplicar polinomios.

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo.

Multiplicar $a - 4$ por $3 + a$.

$$(a - 4)(3 + a) = a(3 + a) - 4(3 + a) = 3a + a^2 - 12 - 4a = a^2 - a - 12$$

4. Datos de vital importancia

Si quieres un pequeño descanso, revisa los siguientes datos de vital importancia (TIENES PROHÍBIDO REVISAR LAS LIGAS ANTES DE ACABAR DE LEER EL MATERIAL):

1. Se han encontrado tabletas babilónicas de 3700 años de antigüedad (Plimpton 322) cuyo contenido consta de ternas pitagóricas (grupos de 3 números enteros que son longitud de los lados de un triángulo rectángulo). https://elpais.com/elpais/2017/08/25/ciencia/1503672765_998194.html
2. El cero maya estaba relacionado con la muerte, el cierre de ciclos, la medida completada, la integración final, la plenitud, en contraposición a la noción actual de carencia o ausencia. http://oncetv-ipn.net/sacbe/mundo/los_mayas_y_los_numeros/cero.html
3. En el S. VI, Boecio estableció el quadrivium, las cuatro ciencias matemáticas por excelencia que permitirían al hombre la sabiduría: aritmética, geometría, música y astronomía. https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf

5. Teorema del binomio de Newton

Sean a y b números arbitrarios y sea n un número natural. Entonces:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Demostración: La expresión $(a+b)^n$ significa que tenemos que multiplicar $a+b$ consigo mismo n veces. Entonces, al desarrollar todo el producto, los términos que obtenemos están dados por todas las posibles elecciones (combinaciones) de los números a o b en cada uno de los n factores.

Si tenemos un binomio elevado a una potencia n:

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot \ldots \cdot(a+b)\cdot(a+b)}_{n \ veces}$$

Usando la propiedad distributiva, tendríamos que multiplicar cada término de cada binomio entre ellas, es decir escoger un término de cada binomio y multiplicarlas.

Al multiplicar un monomio por un binomio, se multiplica el monomio por cada término del binomio.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Luego, al multiplicar un binomio al cuadrado se multiplicará cada término del primer binomio por cada término del segundo binomio.

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

De igual manera, al multiplicar un binomio al cubo, cada término de cada binomio se multiplicará por cada término de cada binomio, de tal manera que cada término resultante este compuesto por 3 factores.

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3$$

Ahora bien, si tenemos un binomio elevado a la enésima potencia, cada término de cada binomio se multiplicará por cada término de cada binomio, de tal manera que cada término resultante este compuesto por n factores. Esto generará todas las combinaciones posibles, desde multiplicar todas las a obteniendo a^n*,* luego $a^{n-1}b$, hasta obtener b^n.

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot \ \dots \ \cdot (a + b) = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$$

Al obtener todos los términos, se están obteniendo todas las combinaciones de acomodar a o b en n espacios, (por ejemplo, $(a + b)^3 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Sin embargo, hablando de factores, es lo mismo decir ab que ba, por lo que es necesario ver cuándo se repiten los mismos factores.

Observemos entonces que los términos obtenidos son de la forma $a^s b^r$, con $0 \leq s$, $r \leq n$ y $s + r = n$, es decir $s = n - r$. Teniendo así $a^{n-r}b^r$, para saber cuántas veces aparece cada término, podemos verlo como si tuviéramos n elementos ($(n - r) + r = n$) y acomodarlos de todas las formas posibles, lo que daría como resultado $n!$, sin embargo, de estos elementos a se repite $(n - r)$ veces y b se repite r veces, entonces de tener $(n - r)$ elementos, estos los puedo acomodar de $(n - r)!$ maneras diferentes, por lo que si a se repite $(n - r)$ veces se está contando $(n - r)!$ veces en lugar de 1, de igual manera b se repite r veces y se esta contando $r!$ veces en lugar de 1. Por lo que para acomodar n elementos donde uno se repite $(n - r)$ veces y otro r veces, será $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$, lo cual es $\binom{n}{r}$.

Quedando así:

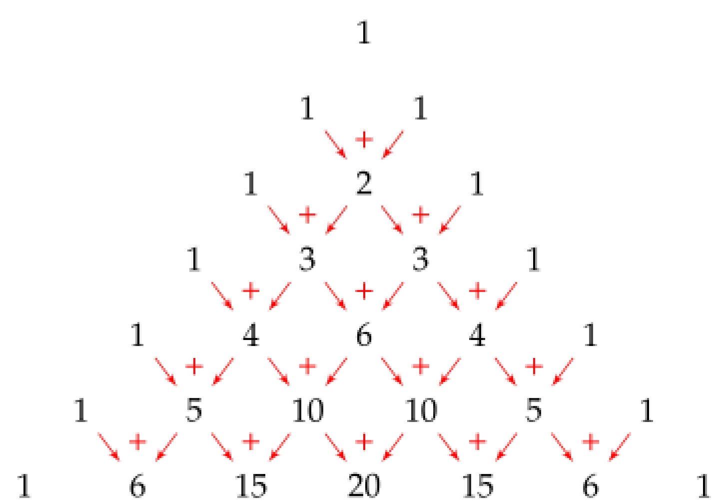
$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n \blacksquare$$

Nótese que el triángulo de Pascal se puede construir en base a los coeficientes del binomio de Newton, donde el renglón está dado por el grado al que es elevado el binomio, quedando de la siguiente manera:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Sin embargo, el triángulo de pascal también se puede construir empezando con 1, el segundo número sumando el primer y segundo número del renglón anterior, el tercer número sumando el segundo y tercer número, y así sucesivamente, el enésimo termino está dado por la suma término $n-1$ y el término n del renglón anterior, y por último el término $n+1$ es un 1. A continuación, se muestra la construcción:



Ejemplo:

Encontrar el coeficiente del término $a^7b^4ce^2$ en el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^{14}$.

Solución:

De igual manera que un binomio es elevado a una potencia, se tendrán que multiplicar cada término del polinomio por cada término de cada polinomio, obteniendo así todas las combinaciones de acomodar a, b, c, d o e en 14 lugares, por lo que para encontrar el coeficiente de $a^7b^4ce^2$ se puede ver como las maneras de acomodar 7 $a's$, 4 $b's$, 1 c y 2 $e's$ en 14 lugares, obteniendo así las veces que se presenta este término:

$$\frac{14!}{7!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 2!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2}=14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 5\cdot 3=360360$$

6. Problemas

1. Sean $a, b, c \in Z$, (esto quiere decir que a, b, c son números enteros). Recordando la propiedad distributiva, utilice números primos para expresar los siguientes números en la forma:
$$(a+b)c$$
    a) 462
    b) 238
    c) -204

   Por ejemplo, 2020=(7+13)101
2. Transforme las siguientes expresiones y obtenga un producto de la forma:
$$(a+b)c$$
    a) $328-41$
    b) $195a+39b$
    c) $80a^2b+32ab^3$

   (Nota: El máximo común divisor debe estar fuera del paréntesis. Por ejemplo $2abc+4ac=(b+2)2ac.$)
3. Multiplicar $a^x-a^{x+1}+a^{x+2}$ por $a+1$.
4. Multiplicar a^2+b^2-2ab por $a-b$ y encontrar otra forma de expresar el producto.
5. Multiplicar a^2+b^2+2ab por $a+b$ y encontrar otra forma de expresar el producto.
6. Expresar a^2-b^2como el producto de dos binomios.
7. Multiplicar x^2+xy+y^2 por $x-y$.
8. Multiplicar x^2-xy+y^2 por $x+y$.
9. Expresar el producto $(n^2-2n+1)(n^2-1)$ usando únicamente dos binomios distintos.

10. Multiplicar $m^{a+1} - 2m^{a+2} - m^{a+3} + m^{a+4}$ por $m^{a-3} - m^{a-1} + m^{a-2}$.
11. Multiplicar $m^3 - 4m + m^2 + 1$ por $m^3 + 1$.
12. Realizar el producto $a^x(a^{x+1} - b^{x+2})(a^{x+1} + b^{x+2})b^x$.
13. Encontrar un polinomio $f(x)$ tal que al multiplicarlo por la expresión $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ el resultado sea la constante 1.
14. Los números reales x, y, z satisfacen las ecuaciones: $x + y + z = 26$ y $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 31$. Determina el valor de la suma $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$.
15. Desarrollar $(2x - y)^5$.
16. Desarrollar la expresión $(2a - 3b^2)^8$.
17. Utilizar el teorema del binomio para desarrollar la expresión $\left(a + 2b + \frac{c}{2}\right)^4$
18. Utilizar el teorema del binomio para probar la fórmula $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
19. Utilizar el teorema del binomio para probar la fórmula $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$
20. Encontrar el término que no contiene a x en el desarrollo de $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$.
21. Probar que para cualquier número natural se tiene la fórmula $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$. Sugerencia: Examinar el coeficiente de x^n al desarrollar ambos términos de la igualdad $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n \cdot (1 + x)^n$
22. Sea $P(x) = (1 - x + x^2 - \cdots + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots + x^{100})$. Muestre que después de multiplicar y simplificar términos, solamente quedarán términos que tienen solamente potencias pares de x.

7. Vídeos

Monomios

https://youtu.be/3vVPmFN9CTY

Consejos para empezar con el álgebra (entre ellos la propiedad distributiva)

https://youtu.be/nu5LeduyMsY

Binomio de Newton

https://youtu.be/xdE-LjKbuGA