Puntos notables en triángulos

Entrenamiento #7 para 4ª etapa
29-31 de Julio
Por: Favela ft. (Fer, Argel ft. (Lulú))

Resumen

Los triángulos contienen ciertos puntos específicos, dignos de mencionar y recordar, que tienen características muy particulares. Así mismo, podemos decir que las rectas que pasan por esos puntos también tienen ciertas propiedades que las hacen bastante útiles a la hora de resolver problemas. Tu misión es, si decides aceptarla, conocer estos puntos y rectas, para utilizarlos en la resolución de tus problemas de geometría. ¿Estás listo?

1. Rectas notables

Esto es algo que ya deberían de conocer, pero igual si no las conocen, se las presento. ¡Ellas son las rectas notables (básicas) del triángulo! (¡Woo! ¡Yeah!).

- **Mediana**: Un segmento que va desde uno de los vértices del triángulo, hacia el punto medio del lado opuesto.
- **Bisectriz**: Una recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. Bueno... en realidad esa es una implicación directa de su verdadera definición: una recta que parte de un vértice y que en cada punto equidista hacia dos líneas que se intersecan en dicho vértice. Llamemos a la primera "definición informal de bisectriz"; y a la segunda, "definición formal de bisectriz".
- **Mediatriz**: Una recta perpendicular a uno de los lados, por su punto medio. Aunque, ésta sería su definición informal, que es una implicación directa de su definición formal. Su definición formal es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.
- **Altura**: Un segmento que va desde un vértice, y es perpendicular su lado opuesto o a la prolongación del mismo.

Utilizando estas rectas podemos llegar a los puntos notables, que les presentaremos a continuación.

2. Puntos notables

Sea ABC un triángulo. Hay cuatro puntos notables (básicos) en $\triangle ABC$, a saber:

- A la intersección de las medianas se le llama **gravicentro**. Tradicionalmente se denota por G.
- A la intersección de las bisectrices se le llama **incentro**. Tradicionalmente se denota por I.
- A la intersección de las mediatrices se le llama **circuncentro**. Tradicionalmente se denota por O.
- A la intersección de las alturas se le llama **ortocentro**. Tradicionalmente se denota por H.

3. Una pequeña de cantidad de pequeños ejercicios previos

1. Demuestra la definición informal de la bisectriz.
2. Demuestra la definición informal de la mediatriz.

Ahora sí, vamos a las propiedades de estos puntos con sus rectas. **Nota**: Usaremos la notación tradicional de los puntos notables en los siguientes problemas, y se considerarán siempre en un $\triangle ABC$.

4. Propiedades de los puntos notables

Si creyeron que se salvaron de demostrar las propiedades, están muuuy equivocados. Todas las propiedades hay que demostrarlas para poder utilizarlas.

1. (**Gravicentro**) Sean X, Y, Z son los puntos medios de BC, CA, AB, respectivamente,

   a) Demuestra que las líneas AX, BY, CZ concurren (el punto de concurrencia es G)

   b) Demuestra que:
   $$\frac{AG}{GX} = \frac{BG}{GY} = \frac{CG}{GZ} = 2$$
   Es decir, demuestra que el gravicentro corta a las medianas en razón 2:1

   c) Sea G' la reflexión de G respecto a X. Demuestra que $BGCG'$ es un paralelogramo.

2. (**Circuncentro**) Sean X, Y, Z los puntos medios de BC, CA, AB, respectivamente.

   a) Demuestra que las perpendiculares desde X, Y, Z concurren (el punto de concurrencia es O).

   b) Demuestra que O es equidistante de A, B, C. Concluye que O es el centro de la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$.

   c) (**Ley de Senos Extendida**) Sean a, b, c, las longitudes de los lados BC, AC, y AB, respectivamente, y R el radio de la circunferencia circunscrita. Demuestra que:
   $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

   d) Sea $|ABC|$ el área de $\triangle ABC$. Demuestra que
   $$|ABC| = \frac{abc}{4R}$$

3. (**Ortocentro**) Sean D, E, F los pies de las alturas desde A, B, C sobre BC, CA, AB, respectivamente.

   a) Demuestra que AD, BE, CF concurren (el punto de concurrencia es H).

   b) Demuestra que
   $$\frac{AH}{OX} = \frac{BH}{OY} = \frac{CH}{OZ} = 2$$

   c) (**Línea de Euler**) Demuestra que H, G, O son colineales.

   d) **(Circunferencia de los Nueve Puntos)** Sean H_A, H_B, H_C los puntos medios de AH, BH, CH, respectivamente. Sea O' el punto medio de HO. Demuestra que O' es equidistante a D, E,F, X, Y, Z, H_A, H_B, H_C . Concluye que estos nueve puntos son concíclicos.

   e) De los nueve puntos de la circunferencia de los nueve puntos (*valga la redundancia*), encuentra los pares de puntos que forman diámetros en dicha circunferencia.

f) Demuestra que de entre los puntos A, B, C, H, el ortocentro del triángulo formado por cualesquiera tres de ellos es el cuarto punto.

g) Demuestra que la reflexión de H respecto a cualquier lado del triángulo, está sobre el circuncírculo del triángulo.

4. (**Incentro**) Sean J, K, L las intersecciones de las bisectrices (interiores) de los ángulos A, B, C con los lados BC, CA, AB, respectivamente.

   a) Demuestra que AJ, BK, CL concurren (el punto de concurrencia es I).

   b) Demuestra que I es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo. **Nota Importante**: Los puntos de tangencia de dicha circunferencia no necesariamente son los puntos J, K, L. **¡Aguas!**

   c) Sea $s = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro del $\triangle ABC$, y Q, R, S los puntos de tangencia del incírculo con los lados AC, AB y CB respectivamente. Demuestra que $AQ = AR = s - BC$, $BR = BP = s - CA$ y $CP = CQ = s - AB$.

   d) (**Teorema de la Bisectriz)** Demuestra que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BJ}{JC}$$

   e) Sea M la intersección de la línea AJ con el circuncírculo de $\triangle ABC$. Demuestra que $MB = MC = MI$, es decir, demuestra que M es el punto medio del arco BC, en el circuncírculo de $\triangle ABC$, que no contiene a A, y que el circuncírculo de $\triangle BIC$ tiene como centro a M.

   f) Sea $|ABC|$ el área de $\triangle ABC$. Demuestra que

$$|ABC| = sr$$

5. (**Excentro**) La bisectriz interior de A, y las bisectrices exteriores de B, C se cortan en un punto I_A. Este punto se llama excentro opuesto a A. De manera análoga se definen los excentros opuestos a B y a C.

   a) Demuestra que existe un círculo con centro en I_A que es tangente a BC, AB, AC. A este círculo se le conoce como excírculo opuesto a A.

   b) Sea P el punto de tangencia del incírculo de ABC en BC. Sea P_A el punto donde el excírculo opuesto a A toca a BC. Demuestra que PA es la reflexión de P respecto al punto medio de BC. Concluye que

$$AB + BP_A = P_AC + CA$$

   lo que significa que P_A parte a la línea quebrada AB, BC, CA a la mitad.

   c) Demuestra que el excírculo opuesto a A toca a los rayos AB, AC en puntos cuya distancia desde A es el semiperímetro de ABC.

   d) Sea P' el punto en el incírculo de ABC tal que PP' es un diámetro del incírculo. Demuestra que A, P', P_A son colineales.

   e) Demuestra que I_A, C, I_B son colineales. De la misma manera, que I_B, A, I_C son colineales, y I_C, B, I_A son colineales.

   f) Demuestra que I_AP_A, I_BP_B , I_CP_C concurren en un mismo punto. Demuestra que este punto de concurrencia es el circuncentro del triángulo $I_AI_BI_C$.

   g) Demuestra que I es el ortocentro de $I_AI_BI_C$.

   h) Sea J' el punto donde la bisectriz exterior de A corta a la línea BC. Demuestra que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BJ'}{J'C}$$

   ¿A qué fórmula se parece? ¿Puedes encontrar una interpretación a esta ecuación si la bisectriz externa es paralela a BC?

5. Agregados culturales

1. Recuerda que en un triángulo isósceles, donde $AB = AC$, la altura desde A, también es mediana, bisectriz y mediatriz. ¿No lo sabías? ¿Y qué esperas para demostrarlo?
2. La reflexión de un punto A con respecto a un punto B, es el punto C que está sobre la prolongación de AB hacia B tal que la distancia de AB es igual a la distancia BC.
3. La proyección de un punto A con respecto a una recta ℓ es la distancia de la recta perpendicular a ℓ que sale de A.
4. La reflexión de un punto A con respecto a la recta ℓ es un punto B tal que AB es perpendicular a ℓ por P y $AP = PB$.
5. Al gravicentro también se le conoce como baricentro o centroide.
6. **Reflexión**: Si G es por gravicentro e I por incentro... ¿porqué O es del circuncentro y H del ortocentro?
7. Para casi todo lo que tiene que ver con alturas, tradicionalmente utilizamos alguna h por ahí.
8. Algunas de las propiedades o los problemas que vienen en esta lista, forman parte del compilado que llamamos "Los 20" del Shariguin. Si quieres ir al nacional, tienes que saber hacer "Los 20" como mínimo requisito.
9. Las ardillas son criaturas muy inteligentes. Para engañar a potenciales rateros hacen creer que enterrarán su comida en un determinado sitio, así que cuando estos intenten de robar la supuesta comida le dará el tiempo suficiente para enterrarla en su verdadero lugar.

6. Lista de problemas

1. Demuestra que en un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.
2. Demuestra que las medianas dividen el triángulo en seis triángulos más pequeños de áreas iguales.
3. Demuestra que el área del triángulo cuyos lados son iguales a las medianas de un triángulo dado es igual a $\frac{3}{4}$ del área del triángulo dado.
4. Sean a, b, c las longitudes de los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que la longitud de la mediana m_a, trazada hacia el lado BC, se calcula por la fórmula:
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$
5. Sea G el gravicentro del triángulo ABC, y sean M, N, P los gravicentros de los triángulos BGC, CGA, AGB, respectivamente. Demuestra que: $\triangle MNP \sim \triangle ABC$
6. Del punto M, situado en el interior del triángulo ABC, se trazan perpendiculares a los lados BC, CA, AB y en ellas se marcan los segmentos MA_1, MB_1, MC_1 iguales a los correspondientes lados del triángulos. Demuestra que el punto M es el gravicentro de $A_1B_1C_1$.
7. Sea G el gravicentro del triángulo ABC. Demuestra que:
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$
8. Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.

9. En un triángulo ABC se dibuja una línea que pasa por el gravicentro de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la cortan en los puntos X, Y, Z. Estos tres puntos se nombran de manera que Y quede entre X y Z. Demuestra que $CY = AX + BZ$

10. Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

11. Sea I el incentro de un triángulo ABC. Sea $\angle BAC = \alpha$. Demuestra que

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

12. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia con centro O. Demuestra que $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

13. Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

14. (**Línea de Simson**) Sean A', B', C' las proyecciones de un punto P sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que los puntos A', B', C' son colineales si y sólo si el punto P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo. A la recta que pasa por A', B', C' se le conoce como línea de Simson (de P).

15. Sea D el punto donde la bisectriz del $\angle BAC$ de un triángulo ABC corta al lado BC, y sean a, b, c los lados BC,CA,AB, respectivamente. Demuestra que

$$BD = \frac{ac}{b+c}$$

16. Sean a, b, c los lados BC,CA,AB de un triángulo ABC. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\angle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que:

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$$

17. Sean M, N, P los puntos medios de los arcos BC, CA, AB, respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. MP y MN cortan en D y E a los lados AB y AC. Demuestra que DE es paralela a BC y que pasa por el incentro de ABC.

18. Sea AD la altura del triángulo ABC, H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.

19. Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide a una altura, es el mismo para las tres alturas.

20. Sea H el ortocentro de un triángulo ABC. Demuestra que los circuncírculos de los cuatro triángulos ABC, HBC, HAC, HAB, tienen todos el mismo radio.

21. Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico. **Nota**: El **triángulo órtico** es aquel cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo original.

22. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. En la recta CH se toma un punto K tal que ABK es un triángulo rectángulo. Demuestra que

$$|ABK| = \sqrt{|ABC| \cdot |ABH|}$$

.

23. Dos triángulos A_1BC y A_2BC están inscritos en un círculo y tienen el lado BC en común. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos A_1BC y A_2BC, respectivamente. Demuestra que el segmento H_1H_2 es igual y paralelo al segmento A_1A_2.

24. Sean AD, BE, CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea H su ortocentro. Sea N el punto medio de AH y sea M el punto medio de BC. Demuestra que NM es perpendicular a FE.

25. En un triángulo equilátero ABC, el punto K divide al lado AC en razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en razón $1:2$. Demuestra que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo ABC.

26. Si s, r, R son el semiperímetro, el inradio y el circunradio de un triángulo ABC, demuestra que $abc = 4srR$.

27. Sean M,N las proyecciones del ortocentro de un triángulo ABC sobre las bisectrices interior y exterior del ángulo $\angle B$. Demuestra que la línea MN biseca al lado AC.

28. En un triángulo ABC sean H el ortocentro, O el circuncentro, y AL la bisectriz de $\angle BAC$. Demuestra que AL biseca a $\angle HAO$.

29. Sean AD, BE, CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sean H, O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. La línea AO corta a CF en el punto P. Si $FP = HE$, demuestra que $AB = BC$.

30. En un triángulo ABC sean H, O su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Sea D el punto donde la línea AO corta al circuncírculo. Demuestra que HD biseca a BC.

31. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo $\angle A$ corta al lado BC en U. Demuestra que la mediatriz de AU, la perpendicular a BC por U y el circundiámetro a través de A son concurrentes.

32. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC. Demuestra que M es el punto medio de ST.

33. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\measuredangle PHB = \measuredangle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC considera M el punto medio del arco BC que no tiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

34. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

35. Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a ω_1 en B y secante a ω_2 en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersectar a ω_2 en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre ω_2 que no contiene a E y sea H la intersección de BF con ω_2. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

36. Sean ABC un triángulo acutángulo y l una recta. Sean l_a, l_b y l_c las reflexiones de l con respecto a los lados BC, CA, y AB, respectivamente. Sean A', B' y C' los puntos de intersección de las rectas l_b y l_c, l_c y l_a, l_a y l_b, respectivamente. Demuestra que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABC.

37. En un triángulo ABC la mediana y la altura en A dividen al ángulo A en tres partes iguales. ¿Cuáles son los ángulos del triángulo ABC?

38. En el triángulo ABC, la altura, la bisectriz y la mediana desde C dividen a $\angle C$ en cuatro ángulos iguales. Encuentre los ángulos del triángulo.

39. Un triángulo ABC es tal que $\angle BAC = 60^\circ$. Sean D y E puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, de tal manera que $BD = DE = EC$. Sea O el punto de intersección de BE y DC. Demuestra que O es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

40. Sea ABC un triángulo con $AB = BC$ y $\measuredangle CBA = 30$, y sean D el pie de altura desde A y M el punto medio de BC. Llamamos P al pie de la perpendicular desde M hacia la paralela a BC por A. El segmento MP cruza a la altura desde B hacia AC en R. Encuentra el valor de $\frac{RB}{RP}$.

41. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ se intersectan en P. Se sabe que la diagonal BD es perpendicular al lado AD, y que $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, y que $\angle ADC = 135^\circ$. Encuentre la razón $\frac{DP}{PB}$.

42. En un triángulo ABC, $BC = AC$ y $\angle ACB = 90^\circ$. Si D y E son puntos sobre AC y AB, respectivamente, tales que $AD = AE$ y $2CD = BE$. Sea P el punto de intersección de BD con la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Calcule, en grados, el $\angle PCB$.