Guía 2: Puntos, rectas y circunferencias notables en el triángulo. Teorema de Pitágoras. Ternas Pitagóricas

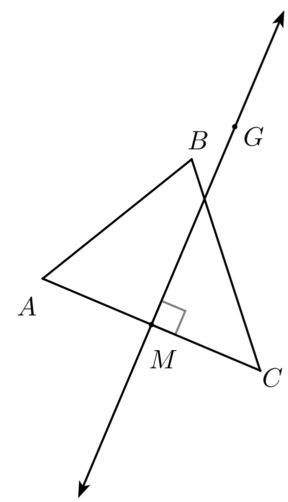
Eduardo Sarabia

27 de enero de 2011

Puntos, rectas y circunferencias notables en el triángulo.
Dado el $\triangle ABC$, definimos:

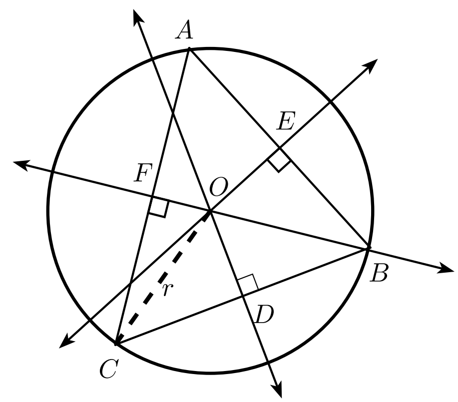
1. **Mediatriz:** recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio. La mediatriz, es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

   M es el punto medio de $\overline{AB}$ ($AM = MB$), y dado cualquier punto G sobre la mediatriz, se tiene que G equidista de A y B, es decir, $AG = GB$.



Teorema 1 *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.*

Demostración: Sean l_a y l_b las mediatrices de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$. Se tiene que l_a y l_b se intersectan en O (de lo contrario $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ serían paralelas y no se tendría el $\triangle ABC$). Como O está en l_a se tiene que $OA = OB$, de igual forma O se encuentra en l_b por tanto $OA = OC$. Como $OA = OB$ se puede concluir que O se encuentra en la mediatriz de $\overline{AB}$.

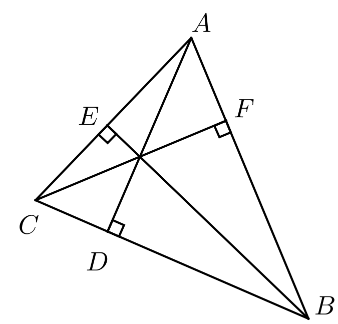


O : Circuncentro
r : radio de la circunferencia circunscrita. (**circunradio**).
$r = OA = OB = OC$
La intersección de las tres mediatrices del triángulo, el **circuncentro**, es el centro de la circunferencia **circunscrita** al triángulo.

2. **Ceviana:** segmento que une un vértice del triángulo con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.

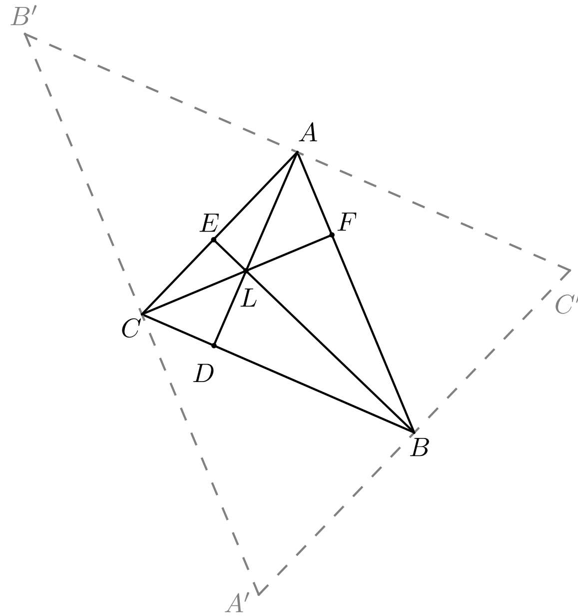
3. **Altura:** segmento perpendicular a un lado del triángulo trazado desde el vértice opuesto.

   En la figura,
   $\overline{AD}$ es altura del triángulo respecto al lado $\overline{BC}$
   $\overline{BE}$ es altura del triángulo respecto al lado $\overline{AC}$
   $\overline{CF}$ es altura del triángulo respecto al lado $\overline{AB}$



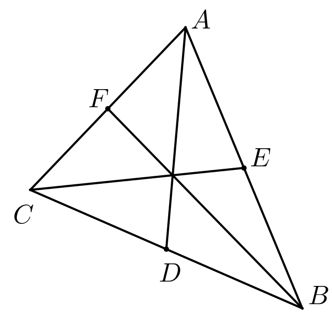
Teorema 2 *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración: Dado el $\triangle ABC$, trazamos por cada vértice la recta que es paralela al lado opuesto y sea $\triangle A'B'C'$, el determinado por dichas rectas. Como $\square ABCB'$, $\square AC'BC$ y $\square ABA'C$ son paralelogramos, se tiene que $CB = B'A = AC'$ por tanto$A$ es punto medios de $\overline{B'C'}$, de forma análoga se muestra que B y C son puntos medios de $\overline{C'A'}$ y $\overline{A'B'}$ respectivamente. Así las alturas del $\triangle ABC$ son las mediatrices del $\triangle A'B'C'$ por tanto son concurrentes.
Luego, la intersección de las tres alturas del $\triangle ABC$, es el **ortocentro** L.

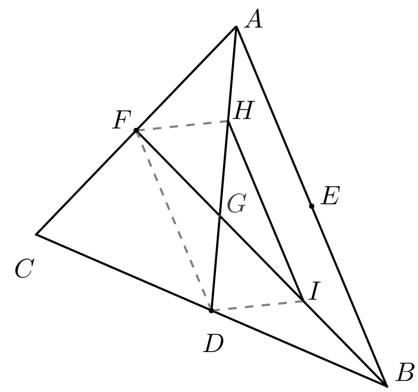


4. **Mediana:** segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

   En la figura D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.



Teorema 3 *Las medianas de un triángulo son concurrentes.*



Demostración: Sean $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$ las medianas de $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente, y G supunto de corte. Sean H e I los puntos medios de $\overline{AG}$ y $\overline{BG}$ respectivamente. Por la semejanza entre el $\triangle GHI$ y el $\triangle GAB$ se tiene que

$$\frac{HI}{AB} = \frac{HG}{AG} = \frac{1}{2}$$

es decir, $HI = \dfrac{AB}{2}$. Como $FD = \dfrac{AB}{2}$, se tiene que $\square HIFD$ es un paralelogramo. Luego, $HG = GD$ por ser $\overline{HD}$ y $\overline{FI}$ diagonales del paralelogramo y cortarse en el punto medio. Así, $AG = 2GD$, lo que quiere decir que una mediana corta a la otra a razón de $2:1$. Igualmente, la mediana $\overline{CE}$ cortara a $\overline{AD}$ en un punto G' tal que $AG' = 2G'D$. Por lo anterior podemos concluir que $G = G'$, es decir, las tres medianas concurren.

El punto de intersección de las tres medianas G, llamado **baricentro** o centro de gravedad , divide a cada mediana en dos segmentos tales que uno es el doble del otro.

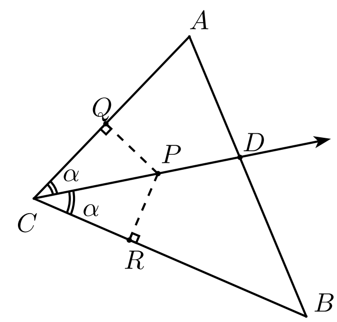
Al ser $\overline{AD}, \overline{BF}$ y $\overline{CE}$ medianas, se cumplen las siguientes relaciones:

$AE = EB, BD = DC$ y $CF = FA$

$AG = 2GD, GD = \frac{1}{3}AD, AG = \frac{2}{3}AD$

$BG = 2GF, GF = \frac{1}{3}BF, BG = \frac{2}{3}BF$

$CG = 2GE, GE = \frac{1}{3}CE, CG = \frac{2}{3}CE$

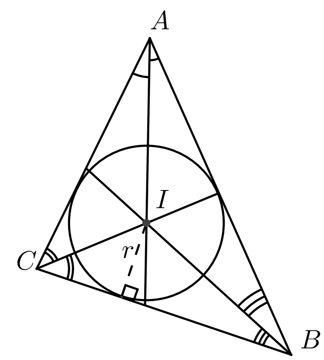


5. **Bisectriz Interior:** semirrecta que biseca un ángulo interior del triángulo.
   En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz, por tanto $\angle ACD \cong \angle DCB$. Cada punto P de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo, es decir, si Q y R son los pies de la perpendicular de P sobre CA y CB entonces $PQ = PR$.

Recíprocamente, un punto P dentro del $\angle ACB$ de un $\triangle ABC$ que cumpla que $PQ = PR$, con Q y R pies de las perpendiculares de P sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es necesariamente un punto sobre la bisectriz interna en C.

Teorema 4 *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración: Sea I el punto de corte de b_b y b_c, bisectices interiores a $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente (el punto I existe ya que de lo contrario $\angle B + \angle C = 180°$). Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Por ser I punto de b_b y b_c se tiene que $IX = IZ$ y $IX = IY$. En conclusión $IX = IZ$, por tanto I está sobre b_a.



El punto de intercección de las bisectrices interiores de un triángulo, el **incentro**, equidista de los lados del triangulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

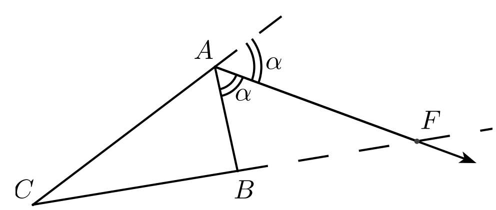
I es el incentro.

r el radio de la circunferencia inscrita.

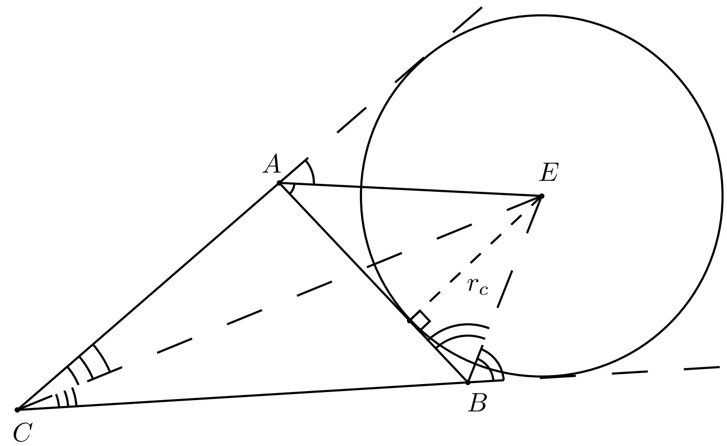
$\angle AIC = 90° + \dfrac{\angle B}{2}$

6. **Bisectriz Exterior:** semirrecta que biseca un ángulo exterior del triángulo.

   $\overrightarrow{AF}$ es bisectriz exterior.



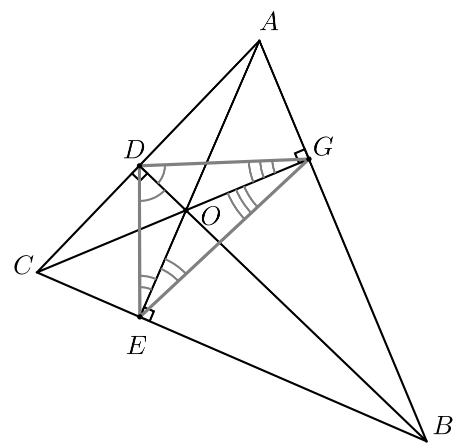
El punto de intersección de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior, el **excentro**, es un punto exterior al triángulo que equidista de los lados y es el centro de una circunferencia exinscritas al triángulo. Cada triángulo tiene 3 excentros y 3 circunferencias exinscritas.



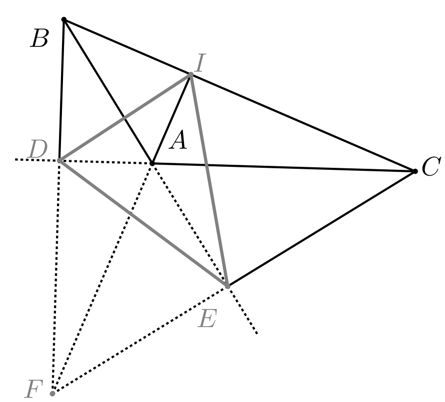
E es el excentro relativo a $\overline{AB}$.
r_c es el radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado c (**Exinradio**).
$\angle BEC = \dfrac{\angle A}{2}$,
$\angle BEA = 90° - \dfrac{\angle C}{2}$

7. **Triángulo Órtico (Triángulo Pedal):** es el triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas de un triángulo dado.

   a) Si $\triangle ABC$ es acutángulo,
   $\triangle DEG$ es el triángulo pedal de $\triangle ABC$
   O es el ortocentro de $\triangle ABC$ y el incentro de $\triangle DEG$
   A, B y C son excentros de $\triangle DEG$

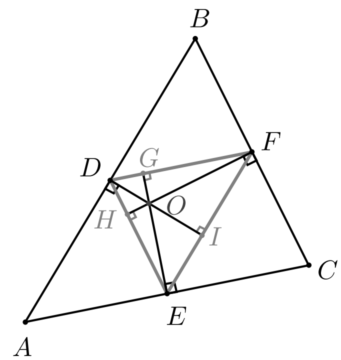


   b) Si $\triangle ABC$ es obtusángulo,
   $\triangle DEI$ es el triángulo pedal de $\triangle ABC$
   F es el ortocentro de $\triangle ABC$
   A el incentro de $\triangle DEI$
   F, B y C son excentros de $\triangle DEI$



8. **Triángulo Mediano:** es el triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo.

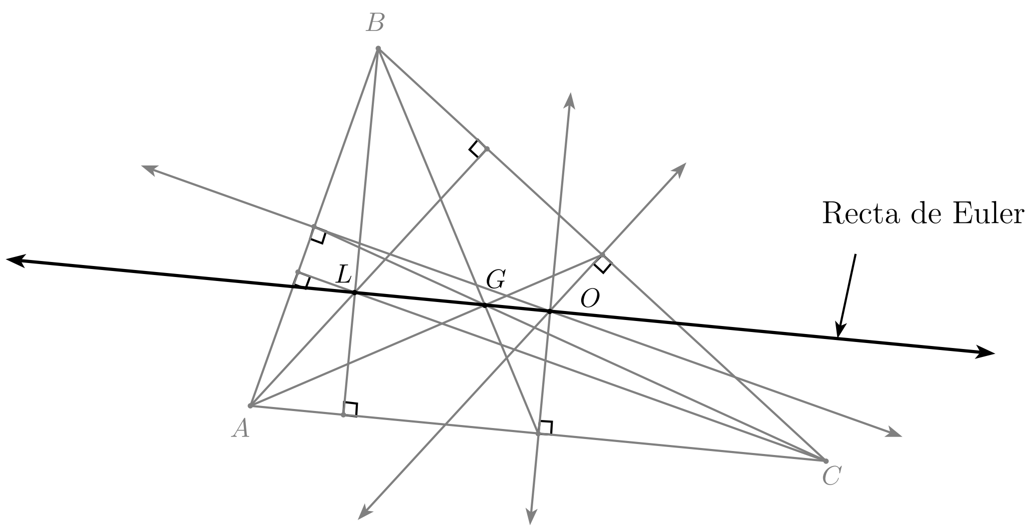
   En $\triangle ABC$ D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. El triángulo mediano es el $\triangle DEF$.
   Los segmentos $\overline{DI}, \overline{EG}$ y $\overline{FH}$ son mediatrices de $\triangle ABC$ y alturas del triángulo mediano ($\triangle DEF$), por tanto el cicuncentro de $\triangle ABC$ coincide con el ortocentro de $\triangle DEF$.



9. **Recta de Euler:** recta que contiene al ortocentro, baricentro y circuncentro del triángulo.

   En la figura, L es ortocentro, G es baricentro y O es circuncentro.

   $LG = 2GO$



   a) La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto.
   b) En todo triángulo isósceles, la recta de Euler es perpendicular a la base y contiene al incentro y un excentro.

c) En todo triángulo equilátero, el ortocentro, el baricentro, el circuncentro, el incentro coinciden. Cualquier recta que pase por ese punto, representa una recta de Euler.

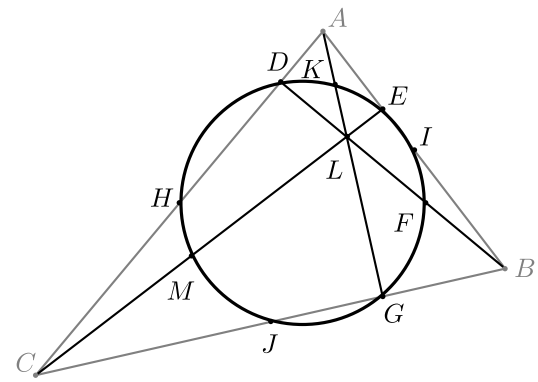
10. **Circunferencia de Euler (Circunferencia de los nueve puntos):** circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo, por los pies de las alturas y por los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro.

H, J, I puntos medios de los lados

L Ortocentro

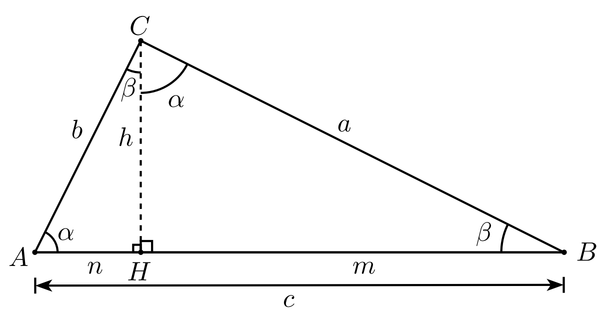
D, E, G pies de alturas

F, K, M puntos medios de $\overline{BL}, \overline{AL}, \overline{CL}$



Teorema de Pitágoras. Ternas Pitagóricas

Dado el triángulo rectángulo en C



Se cumplen las siguientes relaciones métricas:

1. El cuadrado de la longitud de un cateto, es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y su proyección sobre dicha hipotenusa.

$$a^2 = c \cdot m, \, b^2 = c \cdot n$$

2. El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, es igual al producto de longitudes de los segmentos parciales que determina dicho lado.

$$h^2 = m \cdot n$$

3. **Teorema de Pitágoras:** La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

4. El producto de las longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura respecto a ella.

$$a \cdot b = c \cdot h$$

5. La suma de los inversos de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es igual al inverso del cuadrado de la longitud de la altura.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Ternas pitagóricas

Es el conjunto de ternas (a, b, c) con a, b, c naturales, tales que cumplen el teorema de pitágoras.

Ejemplos: $(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), \ldots, (4961, 6480, 8161), \ldots$

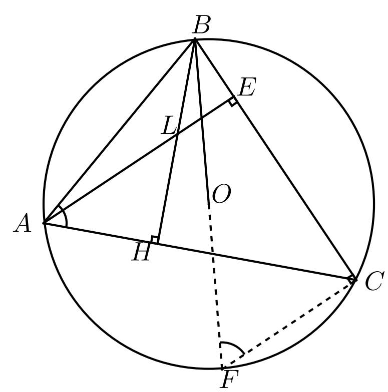
En general, todas son de la forma $(2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2)$ con p, q primos entre si, $p > q$ y p o q par.

Por ejemplo, la terna (12,5,13) de $p = 3$ y $q = 2$.

Problemas Resueltos

Problema 1 *Demostrar que en todo $\triangle ABC$, acutángulo, de ortocentro L y circuncentro O, $\angle ABL = \angle OBC$*

Solución: Prolongando el radio $\overline{BO}$ hasta F,se tiene en el $\triangle AHB$ $angleABL = 90° - \angle BAH$, por otro lado, $\widehat{BC} = 2\angle BAH$ y $\angle F = \dfrac{BC}{2} = \angle BAH$. Así, en $\triangle BCF$ se tiene que $\angle OBC = 90° - \angle BAH$, por tanto $\angle ABL = \angle OBC$.

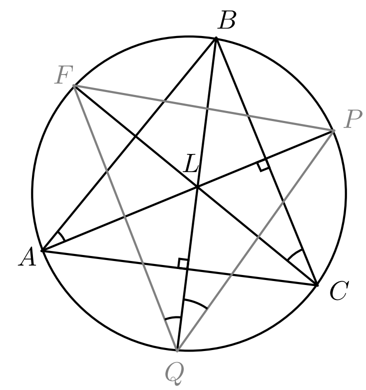


Problema 2 *Sea el $\triangle ABC$ acutángulo, de ortocentro L. Sean los puntos P, Q y F los puntos de corte de las prolongaciones de las alturas respecto a los vértices A, B y C respectivamente con la circunferencia circunscrita. Demuestre que L es incentro del $\triangle PQF$.*

Solución: Por ser la suma de ángulos internos de un triángulo 180°, se tiene que $\angle BAL = \angle LCB$. Así, los arcos $\widehat{BP} = 2\angle BAL$ y $\widehat{FB} = 2\angle LCB$. Luego,

$$\angle FQB = \frac{\widehat{FB}}{2} = \angle LCB$$

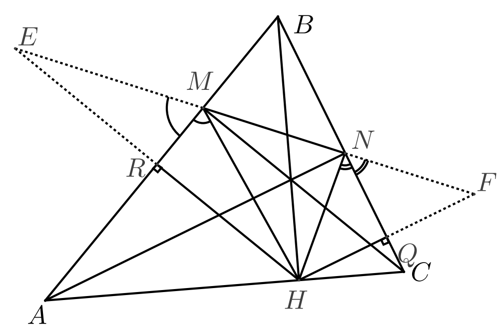
$$\angle BQP = \frac{\widehat{BP}}{2} = \angle BAL,$$



por lo que podemos concluir que $\overrightarrow{QL}$ es bisectriz del $\angle FQP$. En forma análoga, se demuestra que $\overrightarrow{PL}$ y $\overrightarrow{FL}$ bisecan a los ángulos $\angle FPQ$ y $\angle QFP$ respectivamente. En consecuencia L es incentro del $\triangle FPQ$.

Problema 3 *Dado el* $\triangle ABC$, *y* $\overline{BH}$ *altura. Se trazan* $\overline{HR}\perp\overline{AB}$ *y* $\overline{HQ}\perp\overline{BC}$. *Muestre que el perímetro del triángulo pedal del* $\triangle ABC$ *es* $2RQ$.

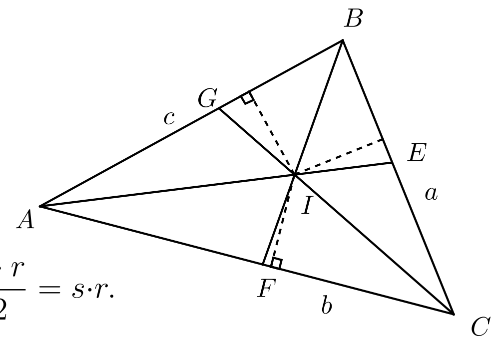
Solución: Sea $\triangle MNH$, el triángulo pedal, su perímetro es $MH + MN + HN$. Como A, B y C son excentros del $\triangle MNH$ se tiene que $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{NC}$ son bisectrices de los ángulos exteriores en M y N respectivamente. Prolongando $\overline{HR}$ y $\overline{HQ}$ hasta cortar a la recta MN en E y F.



En el $\triangle EMH$, isósceles ($\overline{MR}$ es altura y bisectriz),$EM = MH, ER = RH$.
En el $\triangle HNF$, isósceles ($\overline{NQ}$ es altura y bisectriz), $NF = HN, HQ = QF$.
En el $\triangle ENF$, por el teorema de la base media, $EF = 2RQ$.
Así, $EM + MN + NF = 2RQ$, por tanto $MH + MN + HN = 2RQ$.

Problema 4 *Dado un triángulo con inradio* r *y semiperímetro* s, *demostrar que el área del triángulo es* $s \cdot r$.

Solución: Sea el $\triangle ABC$ con incentro I. En el $\triangle BCI$, sea la base $\overline{BC} = a$ y su altura r. Por tanto, $A_{\triangle BCI} = \dfrac{a \cdot r}{2}$. Por un razonamiento análogo, $A_{\triangle ABI} = \dfrac{b \cdot r}{2}$ y $A_{\triangle CAI} = \dfrac{c \cdot r}{2}$. Luego



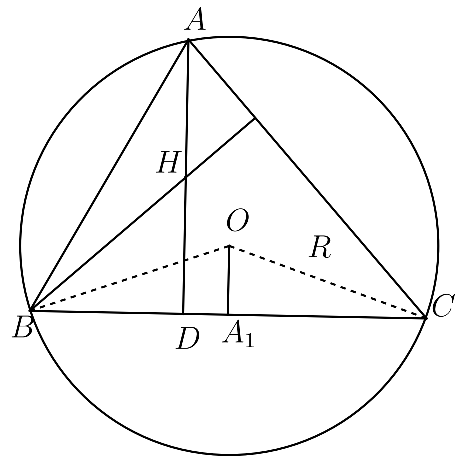
$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle BCI} + A_{\triangle ABI} + A_{\triangle CAI} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = s \cdot r.$$

Problema 5 *Sea el $\triangle ABC$ con circunradio R y ortocentro H. Demuestre que*

$$AH^2 = 4R^2 - a^2$$

Solución: Como A_1 es punto medio, utilizando el teorema de pitágoras se tiene que $OA_1^2 + \dfrac{a^2}{4} = R^2$. Simplificando la expresión y despejando tenemos $4OA_1^2 = 4R^2 - a^2$ pero como $AH = 2OA_1$ (por ser la distancia del ortocentro a un vértice el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto[a]). Por tanto, $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

[a] Problema propuesto

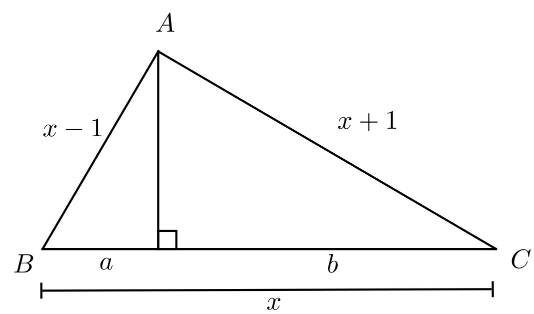


Problemas Propuestos

Problema 6 *En un $\triangle ABC$ la mediana $m_a = AA'$ satisface $m_a > \dfrac{a}{2}$. Muestre que $\angle BAC$ es agudo.*

Problema 7 *Sea el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Una recta por A corta al circuncírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D respectivamente. Muestre que los circuncírculos de los triángulos $\triangle DCE$ y $\triangle BDE$ son tangentes a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente*

Problema 8 *Dada la figura, demuestre que $b - a = 4$*



Problema 9 *Cuatro pelotas identicas se colocan en el piso formando un cuadrado con las cuatro. Una quinta pelota se coloca sobre las otras cuatro de tal forma que toca a todas ellas. Si el diámetro de una pelota es 25, ¿a qué distancia del suelo, se encuentra el centro de la quinta pelota?*

Problema 10 *Demuestre que la distancia desde un vértice en un triángulo al punto de tangencia del incírculo con uno de los lados adyacentes es la diferencia entre el semiperímetro del triángulo y el lado opuesto.*

Problema 11 *Sea el* $\triangle ABC$ *con* H, G *y* O *ortocentro, baricentro y circuncentro. Sea* N *el circuncentro del triángulo medial. Demuestre que si cualesquiera dos de los siguientes puntos* H, G, O *o* N *son iguales, el triángulo es equilátero.*

Problema 12 *Demostrar que en todo triángulo, la distancia del Ortocentro a un vértice, es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto.*

Problema 13 *Demostrar que en todo triángulo, el ortocentro, baricentro y circuncentro, son colineales*

Referencias

[1] Rincón G, 1994. Un recorrido por la Geometría. Universidad Antonio Nariño-olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

[2] Bulajich R., Gómez J.A., 2004. Geometría. Cuadernos de Olímpiadas.

[3] Gallegos F. Geometría. Teoría y Práctica.

[4] Ballester C., 1995. Geometría. CENAMEC.