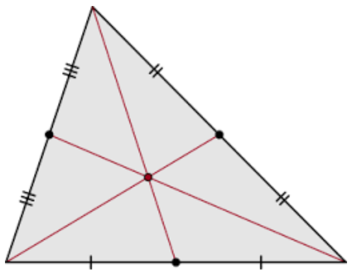
Tercer Entrenamiento Geometría
Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx
5 de Septiembre de 2020

Puntos y rectas notables de un triángulo

Las medianas y el gravicentro

Dado un triángulo, podemos asociarle varios tipos de líneas las cuales poseen propiedades interesantes e importantes. Quizá la más simple de éstas es la línea que va de un vértice hacia el punto medio del lado opuesto. Esta linea es llamada *mediana* del triángulo.

Teorema: Las medianas en un triángulo concurren en un punto llamado *gravicentro* y se dividen por éste en la razón $2 : 1$, a partir de los vértices.



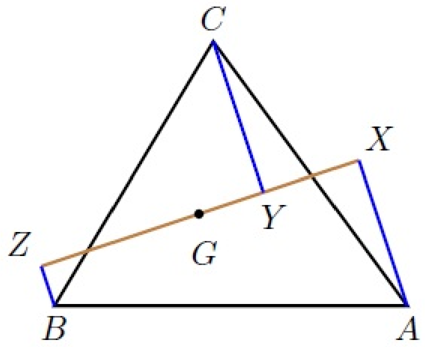
Ejemplo 1: Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.

Ejemplo 2: Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, y sean M, N y L los gravicentros de los triángulos BPC, CPA y APB, respectivamente. Demuestra que el triángulo MNL es semejante al triángulo ABC.

Problemas:

1. Del punto M, situado en el interior del ABC, se trazan perpendiculares a los lados BC, AC, AB y en ellas se marcan los segmentos MA_1, MB_1 y MC_1 iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que el punto M es el gravicentro del $A_1B_1C_1$.

2. En un triángulo ABC se dibuja una línea que pasa por el gravicentro de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la intersecan en los puntos que se muestran en la figura siguiente. Demuestra que $CY = AX + BZ$.



3. Los lados de un triángulo son a, b y c. Demuestra que la longitud de la mediana m_a, trazada hacia el lado BC, se calcula por la fórmula

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

4. Demuestra que si en un triángulo se cumple que

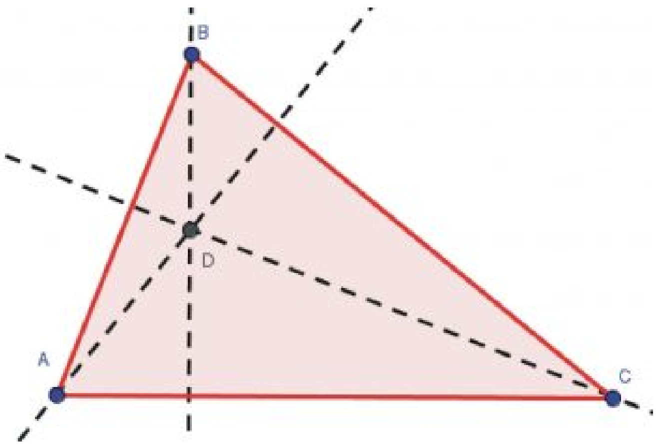
$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$$

entonces éste es un triángulo rectángulo.

Las alturas y el ortocentro

Recordemos que la *altura* de un triángulo es la línea perpendicular a un lado trazada desde el vértice opuesto a este lado.

Teorema: Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado *ortocentro*.



Ejemplo 3: Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea H su ortocentro. Sea N el punto medio de AH y sea M el punto medio de BC. Demuestra que NM es perpendicular a FE.

Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx

Ejemplo 4: El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos $\measuredangle A, \measuredangle B$ y $\measuredangle C$, cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos D, E y F, respectivamente. Sea I el incentro del triángulo ABC. Demuestra que I es el ortocentro del triángulo DEF.

Problemas:

1. Demuestra que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.

2. Sea AD la altura del triángulo ABC y H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.

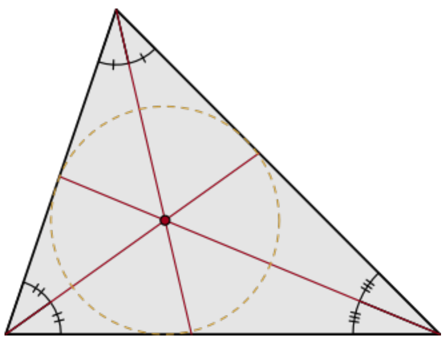
3. Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo formado por los tres pies de las alturas (*triángulo órtico*).

4. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y H el punto de intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, EH y AF concurren.

Las bisectrices y el incentro

La recta que estudiaremos en esta sección tiene muchas propiedades interesantes. Esta recta es la *bisectriz* (interior) de un ángulo y se define como el conjunto de puntos en el interior del ángulo los cuales equidistan de los lados de éste. Es muy sencillo ver que efectivamente este conjunto de puntos es una línea recta y que además ésta divide al ángulo en dos ángulos de la misma magnitud.

Teorema: Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo concurren en un punto, el cual es conocido como *incentro* y es el centro de la circunferencia inscrita (o íncírculo) en el triángulo. Al radio de esta circunferencia se le conoce como *inradio*.



Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx

Teorema (de la bisectriz): Dado ABC un triángulo y D un punto sobre el segmento BC entonces AD es bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ si y sólo si $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

Lema: Si I es el incentro de un triángulo ABC, entonces el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BIC es la intersección de la recta AI con el circuncírculo de ABC.

Ejemplo 5: Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

Problemas:

1. Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

2. Sea I el incentro de un triángulo ABC. Sea $\measuredangle BAC = \alpha$. Demuestra que
$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

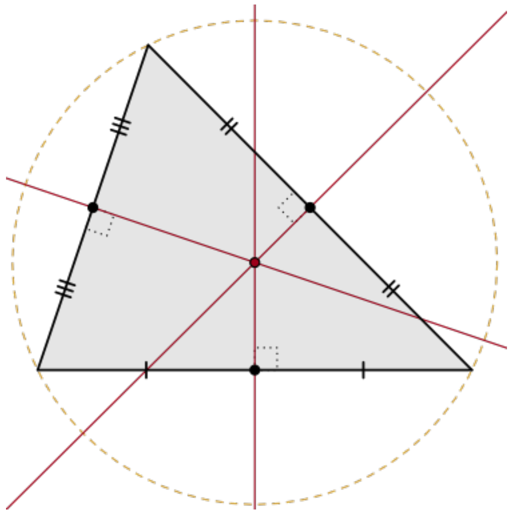
3. Sean a, b, c las medidas de los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\measuredangle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que
$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$$

4. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia con centro O. Demuestra que
$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ$$

Las mediatrices y el circuncentro

Consideremos un segmento fijo AB. Ahora consideremos el conjunto de puntos que equidistan de los puntos A y B. Sean M el punto medio de AB y P uno de los puntos de tal conjunto. Dado que $PA = PB$ y $AM = MB$, tenemos que $PM \perp AB$. De esta manera podemos observar que el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento AB es una línea perpendicular a AB por su punto medio. Esta línea se llama *mediatriz* del segmento.

Teorema: Las mediatrices de los tres lados de un triángulo se intersecan en un punto. El punto de concurrencia es el centro de la circuferencia circunscrita (o circuncírculo) al triángulo y es llamado *circuncentro*. Al radio de esta circunferencia se le conoce como *circunradio*.



Lema (H2O): Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H, y sea M el punto medio de BC. Entonces $AH = 2OM$.

Teorema (Ley de senos): Sea ABC un triángulo con circunradio R y lados a, b, c opuestos a los vértices A, B, C. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \measuredangle BAC} = \frac{b}{\operatorname{sen} \measuredangle ABC} = \frac{c}{\operatorname{sen} \measuredangle BCA} = 2R$$

Ejemplo 6: Dado un triángulo ABC con circuncentro O y ortocentro H, prueba que $\measuredangle BAH = \measuredangle OAC$. En particular, la bisectriz de $\measuredangle BAC$ también biseca al ángulo $\measuredangle HAO$.

Problemas:

1. En un triángulo equilátero ABC, el punto K divide el lado AC en la razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en la razón $1:2$. Demuestra que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo ABC.

2. Sea ABC un triángulo con circunradio R y ortocentro H. Demuestra que

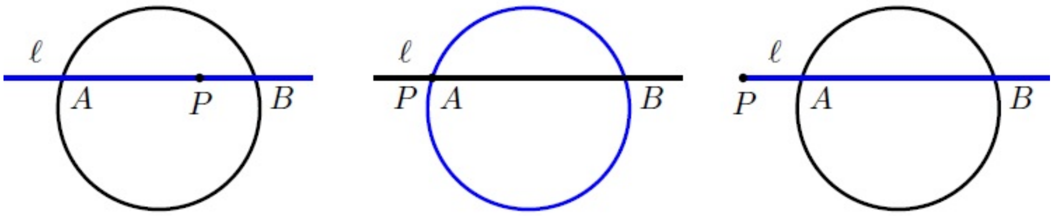
$$AH^2 = 4R^2 - BC^2$$

3. En un triángulo ABC sean H el ortocentro y O el circuncentro. Sea D el punto donde la línea AO interseca al circuncírculo. Demuestra que HD bisecta el lado BC.

Potencia de un punto y ejes radicales

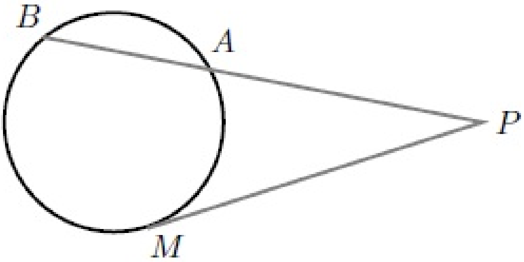
Consideremos un punto P y una circunferencia Ω de centro O y radio r. El número $OP^2 - r^2$ se conoce como la *potencia de P con respecto a* Ω. Notemos que la potencia de un punto dado P es positiva, cero, o negativa, dependiendo de si el punto se encuentra fuera, sobre, o dentro de la circunferencia.

Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx



Teorema: Sea una circunferencia Ω de centro O y radio r y sea P un punto en el plano. Si una línea por P interseca a Ω en A y B, entonces el valor absoluto de la potencia de P es igual al producto de las longitudes de los segmentos PA y PB.

Ejemplo 7: En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersecan la circunferencia en los puntos A, B y M. Demuestra que $PM^2 = PA \cdot PB$.



Ejemplo 8: Dos circunferencias son tangentes externamente en un punto A. Sean C y B los puntos donde una tangente común toca a dichas circunferencias. Demuestra que $\measuredangle CAB = 90°$.

Teorema (Ley de cosenos): Sea ABC un triángulo. Si suponemos que $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ y $\theta = \measuredangle ACB$ entonces se satisface la siguiente igualdad

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Teorema: Dadas dos circunferencias no concéntricas, el conjunto de puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas es una recta perpendicular a la recta que une a los centros de ambas circunferencias. A este conjunto se le denomina *eje radical*.

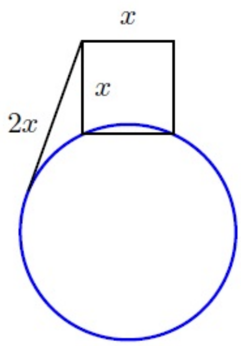
Ejemplo 9: Demuestra que el eje radical de dos circunferencias, donde ninguna de ellas contiene a la otra, es la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos tangentes comunes.

Teorema: Dadas tres circunferencias cuyos centros no están alineados, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) se intersecan en un punto. Este punto es llamado el *centro radical* de las circunferencias.

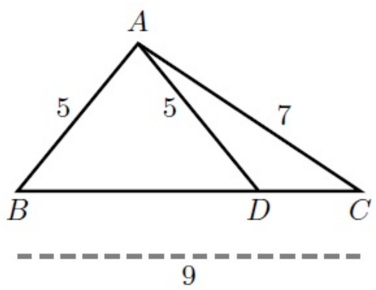
Tercer Entrenamiento Geometría
Israel Bonal Rodríguez y Jesús Antonio Martinez Miranda
israel.bonal@cimat.mx - jesus.martinez@cimat.mx
5 de Septiembre de 2020

Problemas:

1. En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.



2. En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.



3. Por un punto sobre el eje radical de dos circunferencias dibujamos secantes a cada una de éstas. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos forman un cuadrilátero ciclico.

4. Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca sus lados en los puntos A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual intersecta a la circunferencia en el punto C. El segmento OC intersecta la circunferencia en el punto E. Las líneas AE y OB se intersectan en el punto K. Demuestra que $OK = KB$.

5. Sea ABC un triángulo y D un punto sobre AC tal que BD es la bisectriz de ángulo $\measuredangle B$. El circuncirculo del triángulo BDC intersecta AB en E y el circuncírculo del triángulo ABD intersecta BC en F. Demuestra que $AE = CF$.

6. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB es los puntos D, E y F, respectivamente. La recta AD corta la circunferencia en un

segundo punto Q. Demuestra que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y sólo si $AC = BC$.

7. Una línea paralela al lado BC de un triángulo ABC corta a AB en F y a AC en E. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del triángulo ABC bajada desde el vértice A.