Reducción al Absurdo

Adolfo Rodríguez

Octubre de 2005

La *Reducción al Absurdo* es uno de los métodos más usados para hacer demostraciones matemáticas. La idea es suponer que la proposición que queremos demostrar es falsa, y a partir de esta suposición, usando deducciones matemáticas, llegar a una contradicción o algo absurdo, lo cual implica que nuestra proposición es necesariamente cierta.

Veamos un ejemplo de una demostración por reducción al absurdo:

P1. Demuestre que si m y n son enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par

Solución. Supongamos que n es impar. A partir de esto debemos conseguir una contradicción.

Como n es impar, entonces n^2 y n^3 son ambos impares, de donde $n + n^2 + n^3$ es impar (ya que es la suma de tres impares). Entonces, como $m + m^2 = n + n^2 + n^3$, se tiene que $m + m^2$ es impar.

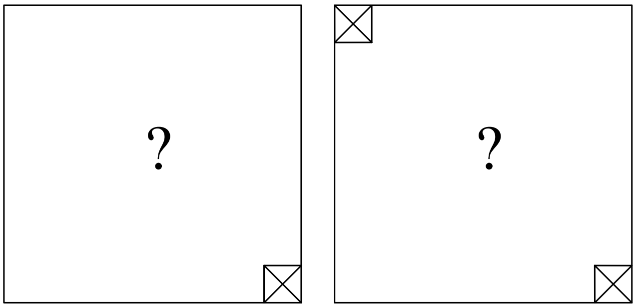
Sin embargo $m + m^2$ es siempre par (ya que $m + m^2 = m(m + 1)$ y necesariamente alguno de los números m ó $m+1$ es par). Hemos llegado a una contradicción. De allí se tiene que n es par, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Un ejemplo muy famoso del método de reducción al absurdo es la demostración de que existen infinitos primos:

Solución. Supongamos que el número de primos es finito. Sean $p_1, \ldots, p_n$ todos los primos. Sea $p = p_1 \cdots p_n + 1$. Claramente p no es divisible por ningún primo. Sin embargo sabemos que todo entero puede ser expresado como producto de primos elevados a potencias, por lo que p debe ser necesariamente divisible por algún primo ¡Contradicción!. Entonces el número de primos es infinito. $\square$

Algunas de las soluciones de los siguientes problemas han sido omitidas intencionalmente. Las soluciones que faltan serán publicadas en otro archivo.

P2. Se tiene un tablero de ajedrez (8×8) cuyas casillas miden todas $1\text{cm} \times 1\text{cm}$, y se cuenta además con muchas piezas de dominó de dimensiones $2\text{cm} \times 1\text{cm}$. Nótese que podemos colocar algunas de estas piezas de manera que cada una de ellas cubra dos casillas del tablero de ajedrez. Claramente, haciendo esto, el tablero puede ser cubierto totalmente (sin que ninguna pieza quede con un trozo fuera del tablero). ¿Podrá todavía ser cubierto si se elimina la casilla en una de las esquinas del tablero? ¿Y si se eliminan las dos casillas de dos esquinas opuestas?.



P3. En cada casilla de un tablero de ajedrez 7×7 se coloca un caballo. ¿Podrán todos ellos hacer un movimiento legal al mismo tiempo de tal manera que todos caigan en casillas distintas?.

P4. Sean a, b y c enteros impares. Demuestre que no existe ningún número racional x tal que $ax^2 + bx + c = 0$.

P5. Demuestre que existen infinitos primos de la forma $4k + 3$, con k un entero.

Solución. Supongamos que el número de primos de la forma $4k + 3$ (k entero) es finito. Sean $4k_1 + 3, 4k_2 + 3, \ldots, 4k_n + 3$ todos los primos de esa forma. Sea $a = 2(4k_1 + 3)(4k_2 + 3) \cdots (4k_n + 3) + 1$.

Como $(4k_1+3)(4k_2+3) \cdots (4k_n+3)$ es impar, entonces $2(4k_1+3)(4k_2+3) \cdots (4k_n+3) \equiv 2(\text{mód } 4)$. Por lo tanto $a \equiv 3(\text{mód } 4)$. Por otro lado, es claro que a no es divisible por ninguno de los números $4k_1+3, 4k_2+3, \ldots, 4k_n+3$. Esto implica que ninguno de los primos divisores de a es de la forma $4k+3$ (k entero). Cómo a es impar, entonces todos los primos divisores de a deben ser de la forma $4k+1$. Por lo tanto $a \equiv 1(\text{mód } 4)$. Esto contradice el hecho que habíamos obtenido anteriormente que dice que $a \equiv 3(\text{mód } 4)$. Esta contradicción es resultado de suponer que el número de primos de la forma $4k+3$ (k un entero) es finito. Luego, el número de primos de la forma $4k + 3$ es infinito. $\square$

P6. Demuestre que existen infinitos primos de la forma $6k + 5$, con k un entero.

P7. Sea n un número impar, y sean $K_1, K_2, \ldots, K_n$ enteros cualesquiera. Para una permutación $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de los números del 1 al n, se define $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = K_1a_1 + K_2a_2 + \cdots + K_na_n$. Demuestre que existen dos permutaciones distintas $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ y $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tales que $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) - f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ es múltiplo de $n!$.

P8. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, no puede ser expresado como p/q, donde p y q son enteros.

Solución. Supongamos que existen enteros positivos p_0 y q_0 tales que $\sqrt{2} = p_0/q_0$, luego:

$$p_0^2 = 2q_0^2$$

Entonces p_0 es par. Sea $p_1 = p_0/2$, luego:

$$4p_1^2 = 2q_0^2$$

$$2p_1^2 = q_0^2$$

Entonces q_0 es par. Sea $q_1 = q_0/2$, luego:

$$2p_1^2 = 4q_1^2$$

$$p_1^2 = 2q_1^2$$

De forma análoga al procedimiento anterior, se tiene que p_1 y q_1 son ambos pares, y si $p_2 = p_1/2$ y $q_2 = q_1/2$, entonces

$$p_2^2 = 2q_2^2$$

Si se aplica susesivamente el mismo procedimiento, se obtiene que existen enteros positivos $p_0, p_1, p_2, \ldots$ tales que $p_{i+1} = p_i/2$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Entonces $p_0 > p_1 > p_2 > \cdots$. Esto implica que existe una sucesión infinita decreciente de enteros positivos. Sin embargo, dicha sucesión no puede existir. Llegamos a algo absurdo, por lo tanto los enteros p_0 y q_0 no existen, es decir $\sqrt{2}$ es irracional.

Invitamos al lector a demostrar que no existe una sucesión infinita decreciente de enteros positivos. $\square$

El método usado en la demostración anterior se conoce como *Descenso Infinito*. Este consiste en probar la existencia de una sucesión infinita decreciente de enteros positivos para obtener así una contradicción.

Los siguientes problemas tienen al menos una solución usando descenso infinito:

P 9. Demostrar que la ecuación $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ no tiene soluciones en enteros positivos.

P 10. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ no tiene soluciones enteras con $x > 0$.

P 11. Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$ no tiene soluciones en enteros positivos.

Enviar dudas, comentarios y correcciones a acm.org.ve@gmail.com.