

Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 1

Repaso de progresiones y otras sumas

Suma de Gauss

Cuenta la leyenda que el niño Gauss tuvo que calcular la suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$$

Aunque podría parecer aparatosa un truco muy sencillo la resuelve. Acomodemos los términos de manera inteligente y sumemos:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Como el número 101 se está sumando 100 veces, luego $2S = 101 \cdot 100$, que implica $S = \frac{101 \cdot 100}{2}$. Nada especial tiene el número 100, de hecho:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

Finalmente, notemos que el número $n+1$ se está sumando n veces, por lo que $2S = (n+1) \cdot n$, que implica $S = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$.

Tomado de: http://ommags.com/Talleres_2018/TeoriaDeNumeros2.pdf

Progresiones Aritméticas

Definición: Es una sucesión o colección de números de tal manera que cada uno de los términos de la sucesión se puede obtener del anterior sumando una cantidad fija. En términos más formales, es una colección $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ en la que para cada $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es la constante llamada **diferencia de progresión**, y se denota por $\{a_n\}$.

Algunas propiedades:

- El término a_n es igual a $a_0 + nd$, para $n = 0, 1, 2, \dots$
- $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_0 + a_n}{2} (n + 1)$
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Resulta especialmente interesante la propiedad b), pues se trata de la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, con la que podemos obtener otras sumas, que tendrás que demostrar más adelante:

- Suma de los primeros n pares: $n(n + 1)$
- Suma de los primeros n impares: n^2

Progresiones geométricas

Definición: Es una sucesión de números relacionados de tal manera que cada uno se puede obtener de anterior multiplicando a éste por una cantidad fija llamada razón común o **razón de la progresión**. La sucesión $\{a_n\}$ es progresión geométrica si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, una constante para $n \geq 0$.

Propiedades

- El n -ésimo término de $a_n = a_0 r^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$
- $a_0 + a_1 + \dots + a_n = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$, para $n = 0, 1, 2, \dots$
- Si los términos son positivos, se tiene que $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Otras sumas

- Suma de los primeros n cuadrados: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$
- Suma de los primeros n cubos: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Fuentes de consulta:

- Talleres de la OMMAGS 2017, repaso álgebra del 8 de junio. Disponible en: <http://ommags.com/new/wp-content/uploads/2017/06/08-Junio-SumasRepaso-Álgebra.pdf>
- Talleres de la OMMAGS 2018, Teoría de Números, taller 2. Disponible en: http://ommags.com/Talleres_2018/TeoriaDeNumeros2.pdf
- Olimpiada Mexicana de Matemáticas Curso de Entrenadores 2014. Disponible en: <http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/CursoEntrenadores2014.pdf>
- Álgebra. R. Bulajich, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado. 1a Ed. (2014)

Problemas

- Demostrar las propiedades de las sumas aritméticas
- Demostrar las propiedades de las sumas geométricas
- Evalúa $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots + 195 + 199 + 203$
- a, b, c, d, e forman una progresión aritmética con suma 100, encuentra c .
- Encuentra el término 100 de $1, 5, 10, 16, 23, 31, \dots$
- Evalúa $1 + 3 + 32 + 33 + \dots + 399$
- a, b, c, d, e forman una progresión geométrica con producto 243, encuentra c .
- Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión geométrica, ¿Cuál es la razón de la progresión?
- Calcula el valor de la siguiente suma $99 - 97 + 95 - 93 + \dots + 3 - 1$.
- ¿Para qué entero positivo n se satisface la ecuación siguiente? $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{2006}{2007}$
- Encontrar la suma de todos los números de tres cifras en cuyos dígitos aparece exactamente una vez los dígitos 1, 2, 3 y 4.
- Calcular $2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$
- Raúl leyó un libro. El primer día leyó 30 páginas y cada día siguiente leyó 6 páginas más que el día anterior. Si la lectura le llevó 100 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

Problemas más interesantes

1. Prueba que el número: $2^{2005} + 4^{2005} + \dots + 2006^{2005}$ es múltiplo del número $2 + 4 + 6 + \dots + 2006$
2. Si a, b y c están en progresión geométrica, entonces
$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$$
3. (Eslovenia, 2009) Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética no constante con término inicial $a_1 = 1$. Suponga que los términos a_2, a_5 y a_{11} forman una progresión geométrica. Encuentre la suma de los primeros 2009 términos.
4. Muestre que hay 5 números primos que están en progresión aritmética con diferencia 6. ¿La progresión es única?
5. Los números a, b, c, d están en progresión aritmética (en ese orden). Demostrar que
$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} = \frac{3}{\sqrt{a} + \sqrt{d}}$$
6. (ONMAPS, 2016) Un duende tiene un saco mágico del que puede sacar cualquier cantidad de monedas que desee. Un día, forma n montones de monedas, cada uno con solo 1 moneda. A continuación, procede a realizar la siguiente operación de forma repetida: Primero escoge dos montones y los junta en uno solo; luego saca tantas monedas de la bolsa como la cantidad de montones que no fueron escogidos, y las añade al nuevo montón que formó. Este proceso lo repite hasta que quede solo un montón con monedas. Encuentra todos los posibles valores de n para los cuales, al final de proceso, el último montón tiene 2016 monedas.