

Divisibilidad

Decimos que a divide a b si pasa alguna de las siguientes situaciones:

- 1) La división $b \div a$ es exacta y da un número entero
- 2) La división $b \div a$ deja residuo cero
- 3) Existe un número k de tal forma que $b = ak$

La definición más correcta y que usaremos preferentemente es la definición número 3.

Usamos el término divisor para el número a y el término múltiplo para el número b , siendo pues a un divisor de b , b un múltiplo de a y también lo podemos decir de la forma b es divisible entre a .

También, utilizamos el símbolo de divisibilidad $a|b$ lo cual se lee y se traduce como a divide a b . Para decir que a no divide a b simplemente se tacha el símbolo.

La divisibilidad entonces tendrá varias propiedades interesantes:

- 1) **Reflexiva:** $a|a$
- 2) **Transitiva:** Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$
- 3) **Suma:** Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b+c$
- 4) **Resta:** Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b-c$
- 5) **Otra versión de Resta:** Si $a|b$ y $a|b+c$, entonces $a|c$
- 6) **Multiplicación:** Si $a|b$, entonces $a|bc$ para todo entero c
- 7) **Combinación lineal:** Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx+cy$ para cualesquiera enteros x y y
- 8) **Simetría:** Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a=\pm b$
- 9) **Divisores del cero:** $a|0$ para todo entero a
- 10) **Divisibles por cero:** $0|a$ sólo cuando $a=0$
- 11) **Divisibles por 1:** $1|a$ para todo entero a

Se debe tener cuidado al hablar de divisibilidad entre 0, sin embargo, es posible manejarla usando la definición marcada en el número 3 de las definiciones. Estas definiciones y propiedades de la divisibilidad pueden todas ser demostradas con la definición de divisibilidad, y además nos van a permitir, junto con identidades y trucos algebraicos hacer bastante problemas de divisibilidad generales, a diferencia de los criterios de divisibilidad que se limitan a algunos números.

Identidades algebraicas útiles en Teoría de números

Dentro de las identidades más útiles dentro de los problemas de divisibilidad y teoría de números se encuentran las siguientes:

- 1) **Diferencia de cuadrados:** $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Se enuncia así: la diferencia de los cuadrados de dos números, es igual al producto de su suma y de su resta (binomios conjugados).

- 2) **Binomio al cuadrado:** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Se enuncia así: El cuadrado de la suma de dos números (binomio) es igual a la suma del cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble producto de el primero por el segundo.

- 3) **Diferencia de cubos:** $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

- 4) **Diferencia de potencias:** $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

- 5) **Suma de potencias con exponente impar:** $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \dots - xy^{2n-1} + y^{2n})$

Estas se utilizan frecuentemente durante la manipulación de expresiones para obtener algunas donde tengamos algún factor o sumando que ya sepamos que es divisible entre el número que deseamos o en su defecto sea fácilmente comprobable.

La forma de los números: Residuos y algoritmo de la división

El algoritmo de la división es más que nada el proceso que utilizamos para dividir un número a otro pero haciendo énfasis en el residuo del número. Por ejemplo al dividir el número 2019 entre 6, resulta 336 y sobra 3, esa información se expresa en la siguiente igualdad:

$$2019 = 6 \times 336 + 3$$

El algoritmo general de la división de un número a entre un número b (con $b \neq 0$), nos dice que siempre existirán números enteros q y r (el cociente y el residuo respectivamente) tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < |b|$ donde $|b|$ se refiere al valor absoluto de b .

Este resultado tiene consecuencias importantes, aunque parezca algo trivial.

En particular uno de los usos que se le da principalmente es el clasificar los números acorde a su residuo al dividir entre algún número. Por ejemplo, al dividir entre 5, puede haber números con residuo 0, 1, 2, 3 o 4. Respectivamente, decimos que esos números son de la forma $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$ y $5k + 4$. Hablar de esa forma, nos permite realizar operaciones con el número de tal forma que el cociente resulta ciertamente irrelevante a la hora de ver la divisibilidad por el número por el cual dividimos, por ejemplo, si tenemos un número de la forma $5k + 2$ y quisiéramos demostrar que su cuadrado más uno siempre será divisible por 5, sólo es necesario elevar la expresión de su forma, sumarle uno y verificar que es cierto $(5k + 2)^2 + 1 = (25k^2 + 20k + 4) + 1 = 25k^2 + 20k + 5$. Como todos los términos de esa expresión tienen un factor 5, la expresión siempre será múltiplo de 5 y así habremos demostrado que todos los números de esa forma cumplirán que su cuadrado más uno es múltiplo de 5.

Residuos y congruencias

Hemos hablado ya antes de la divisibilidad y del algoritmo de la división. Ahora bien, con las propiedades de la divisibilidad podemos hacer cosas como sumar dos múltiplos de un número y obtener un número que también será múltiplo, sin embargo, a veces los números o expresiones que consideremos, no serán múltiplos. Analizando su residuo en la división es posible hacer algunas operaciones como la suma, la resta y la multiplicación, de tal forma que el residuo de la suma o producto al dividirlo, será equivalente al residuo de hacer la operación con los residuos (muy parecido a como al sumar o multiplicar y fijarnos sólo en la última cifra, podemos saber la última cifra sin necesidad de calcular todo el número).

Así pues, se inventa como una nueva operación o un esquema en el que las operaciones se puede realizar sólo pensando en el residuo que dejan al dividirse entre el número que estamos considerando. Si estamos dividiendo entre el número n , entonces le llamaremos congruencias módulo n a este sistema de operaciones.

-En general, el residuo de dividir las potencias sucesivas de un número fijo siempre llegarán a un ciclo con un patrón repetitivo como al analizar su última cifra.

Propiedades

-Si el residuo de dividir un número x entre n se denota como $r_n(x)$, entonces:

$$r_n(r_n(x) + r_n(y)) = r_n(x + y)$$

$$r_n(r_n(x) \cdot r_n(y)) = r_n(x \cdot y)$$

-El criterio de divisibilidad del 3 y del 9 son válidos y más aún al sumar las cifras de un número, el número resultante tendrá el mismo residuo al dividir respectivamente entre 3 y 9 que el original

-El criterio del 11 (sumando las unidades, centenas, decenas de millar, etc. y restando las decenas, las unidades de millar, etc) también nos da una forma de calcular el residuo de el número al dividirlo entre 11

-Si $a \equiv x \pmod{n}$ y $b \equiv y \pmod{n}$, entonces:

$$a + b \equiv x + y \pmod{n}$$

$$ab \equiv xy \pmod{n}$$

-En general pueden hacerse suma y resta pensando sólo en el residuo o en números congruentes

-La propiedad general de las congruencias (de hecho es su definición formal)

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n | a - b$$

Problemas

Ejercicio 1. ¿Cuál es el último dígito de 2010^{2010} ? ¿Cuál es el último dígito de 2011^{2011} ? ¿Y de 2015^{2015} ? ¿Cuál es el último dígito de 2013^{2013} ? ¿Cuál es el de $2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015} + 2016^{2016} + 2017^{2017}$?

Ejercicio 2. ¿Es $61^{61} + 71^{71}$ divisible entre 3?

Ejercicio 3. Hay que escribir una fila de 20 dígitos de manera que la suma de tres dígitos consecutivos de la fila sea siempre múltiplo de 5. ¿Cuál es la máxima cantidad de dígitos distintos que puede haber en la fila?

Ejercicio 4. Demuestra que $n^7 - n$ es divisible entre 7 para cualquier entero n .

Ejercicio 5. ¿Cuántas ternas de dígitos (x, y, z) es posible formar, de modo que la suma $x^2 + y^2 + z^2$ sea un múltiplo de 5? (Nota: las ternas $(0,1,3)$, $(1,0,3)$ son diferentes.)

Ejercicio 6. Muestra que $2^{2p} + 2^{2q}$ no puede ser un cuadrado perfecto para p, q enteros positivos.

Ejercicio 7. ¿Puede un número con 2013 dígitos 3, 2013 dígitos 2 y 2013 dígitos 0 en cualquier orden ser un cuadrado perfecto?

Ejercicio 8. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también es un primo positivo.

Ejercicio 9. Sea p un número primo tal que $p = p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^4 + p_5^4$ donde p_1, \dots, p_5 son números primos. Muestra que uno de ellos debe ser 5.

Ejercicio 10. Considera los números primos $p_1 < p_2 < \dots < p_{31}$. Si 30 divide a $p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{31}^4$, muestra que entre estos números hay tres primos consecutivos.

- 1) Encuentre todos los enteros n tales que $n - 2 \mid 2n$
- 2) Encuentre todos los enteros n tales que $n - 1 \mid n^2 - 2n$
- 3) Encuentre todos los enteros n tales que $n - 1 \mid n^2 + 2n$
- 4) Encuentre el mayor entero positivo n tal que $n^3 + 100$ es divisible entre $n + 10$
- 5) Demuestra que la fracción $\frac{n+1}{3n+2}$ es irreducible
- 6) Demuestra que la fracción $\frac{12n+1}{30n+2}$ es irreducible
- 7) Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (es decir, están simplificadas), y su suma da un número entero, entonces, tienen el mismo denominador.
- 8) Demuestra que $3 \mid 4^n - 1$
- 9) Demuestra que $11 \mid 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$
- 10) Demuestra que $17 \mid 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}$
- 11) Demuestra que $11 \mid 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$
- 12) Demuestra que $11 \mid 5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$
- 13) Demuestra que $17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
- 14) Demuestra que para cualquier n , $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804
- 15) Encuentra todos los números enteros tales que $3 \mid n^2 + 1$
- 16) Encuentra todos los números primos que son iguales a la suma de dos números primos y también son iguales a la resta de dos números primos
- 17) Demuestra que si dos números enteros a y b cumplen que su producto es 12313942398007, entonces uno de ellos es de la forma $4k+1$ y el otro de la forma $4q+3$.
- 18) ¿Cuáles son las posibles terminaciones del cuadrado de un número entero?
- 19) Demostrar que si un número primo es de la forma $3k+1$ entonces es de la forma $6k+1$

- 20) Demuestra que un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9 (criterio del 9).
- 21) Demuestre que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 para toda n entera
- 22) Demuestra que si la suma de los dígitos de un número n es s , entonces $r_9(n) = r_9(s)$
- 23) Calcula el resto de la división de $(3421098765434566432134567)^2$ entre 9.
- 24) Sean a , b y c enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Prueba que:
- a o b es par
 - a o b es divisible por 3
 - a o b o c es divisible por 5
 - a o b es divisible por 4
- 25) ¿Cuál es el residuo de dividir $2n$ entre $n-1$?
- 26) ¿Cuál es el residuo de dividir $n^2 - 1$ entre n ?
- 27) Demostrar que 3, 5 y 7 es la única terna de números primos que son impares consecutivos.
- 28) ¿Cuáles son los posibles residuos de un número primo al dividirlo entre 4? ¿y entre 6?
- 29) Se sabe que para un número natural n , el número $n^3 + 2009n + 27n$ termina en 3. Encuentra los tres últimos dígitos del número (Sugerencia: "Divide" entre 1000 y observa el residuo, ¿qué pasa si le sumas 27 al residuo?)
- 30) Encuentra todas los enteros positivos n tales que n divide a $3n + 7$
- 31) ¿Cuántos números n existen menores o iguales a 2019 tales que el cociente de dividir n entre 100 y el residuo de dividir n entre 100 es múltiplo de 11?
- 32) Demuestre que si m es un número impar, entonces $2m$ es un número de la forma $4k + 2$.
- 33) Se tiene un número de la forma $3k + 2$ y de la forma $2q + 1$ al mismo tiempo. ¿Qué residuo deja al dividirlo entre 6?
- 34) Sea $N = 20172017 \dots 2017$, el número formado al pegar 2017 veces el 2017. ¿Cuál es el residuo de N al dividirlo entre 3?
- 35) Se define la siguiente función $f(n)$
- Si n es un número de la forma $3k$, entonces $f(n) = \frac{n}{3}$
 - Si n es un número de la forma $3k+1$, entonces $f(n) = 2n + 1$
 - Si n es un número de la forma $3k+2$, entonces $f(n) = 2n - 1$
- Demuestre que para todo entero n , se puede llegar al número 1 aplicando sucesivamente la función (es decir, que existe un entero i tal que si aplicamos sucesivamente la función a un número i veces, llegamos al número 1).
- 36) Demuestre que sin importar qué números enteros naturales sean m y n , el número $mn(m+n)(m-n)$ es divisible siempre por 3.
- 37) Demuestra que la suma del cuadrado de dos enteros nunca puede dar un número de la forma $4k + 3$ o $4k + 2$
- 38) Encuentre todos los números primos p tales que el número $2p + 5$ es el cuadrado de un número entero.
- 39) Demuestra que ningún entero positivo de la forma $8k + 7$ puede ser escrito como la suma de tres números cuadrados perfectos
- 40) Sean p y q dos números primos, demuestre que si $p - q$ es una potencia de 2 mayor a 1, entonces $p + q$ es divisible entre 3.
- 41) Si a es un número impar, entonces demostrar que $a^2 - 1$ es divisible entre 8
- 42) Si a es un número impar y no es divisible entre 3 ni entre 5, entonces demostrar que $240 | a^2 - 1$
- 43) Demuestre que 2002^{2002} no puede escribirse como la suma de los cubos de tres números
- 44) Encontrar todas las soluciones a la ecuación $m^4 + m^2 = n^4 + 5$
- 45) Encuentre todas las soluciones de $1! + 2! + 3! + \dots + n! = m^2$

46) Encuentre todas las soluciones enteras a $3^x + 7^y = 5^z + 1$