Resolución de Ecuaciones Diofánticas

Dennis Díaz

08/02/2020

1 Congruencias

Ejemplo 1. *Resuelva en enteros positivos la ecuación:*

$$3^x - 2^y = 7$$

Solución.

Lo que se hará es analizar la ecuación módulo 8.
Véase que si $y \geq 3$ entonces $2y \equiv 0\ (mod\ 8)$.
Entonces: $3x \equiv -1\ (mod\ 8)$
Pero resulta que $3x \equiv 1, 3\ (mod\ 8)$. Contradicción.
Entonces $y = 1$ o $y = 2$. Al probar estos casos, se llega a una única solución: $(x, y) = (2, 1)$.

■

Ejemplo 2. *Demuestre que la ecuación*

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$$

no tiene soluciones para $x, y \in \mathbb{Z}$.

Solución.

Primero se hace un cambio de variables: $x = z - 1001$. De este modo la ecuación queda como:

$$(z-1000)^2 + (z-999)^2 + \cdots + (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 + \cdots + (z+999)^2 + (z+1000)^2 = y^2.$$

Dado que

$$(z+k)^2 + (z-k)^2 = 2z^2 + 2k^2$$

la ecuación queda como

$$2001z^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + 1000^2) = y^2$$
$$2001z^2 + 2 \cdot \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 2001}{6} = y^2$$
$$2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2$$

Ahora analizamos el lado izquierdo módulo 3:

$$2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 \equiv 1000 \cdot 1001 \cdot 667 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 1 \equiv 2\ (mod\ 3)$$

Pero los cuadrados no pueden ser congruentes con 2 módulo 3. Contradicción. No existen soluciones.

■

Ejemplo 3. *Encuentre todos los pares de números primos (p, q) tales que*

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

Solución.

Revisaremos la ecuación en módulo 3. Si asumimos que $p, q \neq 3$, entonces $p, q \equiv \pm 1$ $(mod\ 3)$. Es fácil ver que $p \equiv p^3 \equiv p^5$ $(mod\ 3)$ Consideremos ahora dos casos:

Caso 1. $p \equiv q$ $(mod\ 3)$. Entonces: $p^3 \equiv q^5 (mod 3)$, luego $p^3 - q^5 \equiv 0$ $(mod\ 3)$.
Pero $(p+q)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1$ $(mod\ 3)$, entonces $p^3 - q^5 \not\equiv (p+q)^2$ $(mod\ 3)$. Contradicción.

Caso 2. $p \equiv -q$ $(mod\ 3)$. Entonces: $p^3 - q^5$ $(mod\ 3)$, luego $p^3 - q^5 \equiv -2q^5 \equiv \pm 1$ $(mod\ 3)$.
Pero $(p+q)^2 \equiv 0$ $(mod\ 3)$, así que $p^3 - q^5 \not\equiv (p+q)^2$ $(mod\ 3)$. Contradicción. Por lo tanto, alguno de p, q debe ser igual a 3.

Si $p = 3$, dado que $p^3 - q^5 \geq 0$, entonces $p^3 \geq q^5$, luego $27 \geq q^5$. Contradicción.
Si $q = 3$, la ecuación se vuelve $p^3 - 243 = (p+3)^2$. Al expandir y despejar se obtiene $p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0$. Por el criterio de raices racionales, p es un divisor primo de $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, luego $p = 2, 3, 7$. Probando los tres casos se obtiene que p solo puede ser 7.

Nota:
Cuando aparecen números primos en una diofántica, es común revisarla módulo 3 ó 6, ya que para todo primo $p > 3$

$$p \equiv \pm 1 \ (mod\ 3)$$

y

$$p \equiv \pm 1 \ (mod\ 6).$$

■

Ejemplo 4. *Demuestre que la ecuación siguiente no tiene soluciones enteras:*

$$x^3 + y^4 = 7.$$

Solución.

En este caso, lo que se hará es probar que en cierto módulo, el lado izquierdo no es congruente con el derecho nunca. En este caso, revisemos ambos lados en módulo 13.
Véase que

$$x^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \ (mod\ 13)$$
$$y^4 \equiv 0, 1, 3, 9 \ (mod\ 13)$$

Ahora, si nos ponemos a probar las distintas combinaciones, veremos que nunca se puede obtener 7 en módulo 13 sumando x^3 y y^4, luego $x^3 + y^4 \not\equiv 7$ $(mod\ 13)$. Esto completa la prueba.

■

2 Problemas

Problema 1.

Encuentre todos los pares de enteros positivos (x, y) que cumplan

$$x^2 - y! = 2001.$$

Problema 2.

Demuestre que para enteros (x, y, z) con $z > 1$, la ecuación

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+99)^2 = y^z$$

no tiene soluciones.

Problema 3.

Busque todas las tripletas de enteros no negativos (x, y, z) que satisfagan la ecuación:

$$5^x 7^y + 4 = 3^z.$$

Problema 4.

Determine todos los primos p para los cuales el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}$$

tiene soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 5.

Determine todas las soluciones enteras no negativas $(x_1, x_2, \cdots, x_{14})$ de la ecuación diofántica

$$x_1^4 + x_2^4 \cdots + x_{14}^4 = 15999$$

si es que dichas soluciones existen (en este caso, dos soluciones son la misma si una es permutación de la otra).