COMBINATORIA

Comenzaremos recordando algunos conocimientos matemáticos que nos son necesarios.

Para ello veamos el concepto de factorial de un número natural.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Es decir, es un producto decreciente desde el número que nos interesa hasta la unidad. Por ejemplo

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Se toma como convenio que $0! = 1$ para poder efectuar determinadas operaciones.

Es inmediato que

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

Lo cual también será muy útil.

Una vez recordado el concepto de factorial de un número pasamos al de número combinatorio. Su nomenclatura es simplemente 2 números naturales puestos uno sobre otro y entre paréntesis, de forma que el superior sea mayor o igual que el inferior.

$$\binom{m}{n}; \qquad m \geq n$$

Su cálculo se expresa en función de factoriales según la siguiente expresión:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Por ejemplo

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{30}{2} = 15$$

Hay varias propiedades importantes de los números combinatorios:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{1! \cdot (m-1)!} = m$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot \big(m-(m-n)\big)!} = \binom{m}{m-n}$$

Y como consecuencia

$$\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$$

$$\binom{m}{m-1} = \binom{m}{1} = m$$

Una última propiedad será:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)! \cdot \big(m-(n+1)\big)!} =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot m!}{(n+1)! \cdot (m-n)!} + \frac{(m-n) \cdot m!}{(n+1)! \cdot (m-n)!} = \frac{(n+1+m-n) \cdot m!}{(n+1)! \cdot (m-n)!} =$$

$$= \frac{(1+m) \cdot m!}{(n+1)! \cdot (m-n)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)! \cdot (m-n)!} = \binom{m+1}{n+1}$$

Una técnica para la obtención de los números combinatorios sin necesidad de realizar tanto producto es el denominado Triángulo de Tartaglia. Consiste en disponer de forma piramidal ordenada los números combinatorios, de forma que en cada fila estén todos los que tienen la misma parte superior:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Etc.

Si observamos, los dos lados de este triangulo están formados por unos y en base a la última propiedad, cualquier número combinatorio se podrá obtener como suma de los dos que tiene encima de él. Así:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Por lo que podremos obtener fácilmente números combinatorios que no correspondan a valores grandes.

Un resultado importante en el que intervienen los números combinatorios es la fórmula del Binomio de Newton que nos da la potencia de un binomio. Así pues:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

lo que de forma abreviada expresaremos como

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

Y para la diferencia

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xy^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}y^n$$

y si como antes expresamos su fórmula abreviada

$$(x-y)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

Por ejemplo:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

Como consecuencias sencillas de lo anterior

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

y

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} = \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} \binom{n}{2i-1}$$

es decir, la suma de los términos pares coincide con la suma de los impares.

Otro resultado útil es el siguiente:

$$4^n = (3+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^{n-i}$$

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 3^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 3^{n-i}$$

sumando, los impares desaparecen y nos quedan los pares duplicados.

$$4^n + 2^n = 2 \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} 3^{n-2i}$$

luego

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} 3^{n-2i} = \frac{4^n + 2^n}{2} = \frac{2^n(2^n+1)}{2} = 2^{n-1}(2^n+1)$$

y lógicamente si restamos, desaparecen los pares y solo nos quedan los impares duplicados

$$4^n - 2^n = 2 \sum_{i=1}^{\left[{(n+1)}/{2}\right]} \binom{n}{2i-1} 3^{n-2i+1}$$

luego

$$\sum_{i=1}^{\left[{(n+1)}/{2}\right]} \binom{n}{2i-1} 3^{n-2i+1} = \frac{4^n - 2^n}{2} = \frac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$$

De una forma sencilla, la combinatoria se puede resumir como técnicas para contar de forma rápida.

Veamos primero los casos en que no se permite la repetición:

Entenderemos por ***Permutaciones*** de un número a la cantidad de formas en que podemos ordenar una cierta cantidad de elementos. Así, si disponemos de n elementos, entenderemos como permutaciones de esos n elementos a la cantidad de ordenaciones distintas que podremos realizar con esos n elementos. La nomenclatura que se utiliza es P_n.

En cuanto a su cálculo, podemos observar que si queremos construir una determinada ordenación, para elegir el primero disponemos de todos los elementos, para elegir el segundo ya disponemos solo de $n-1$ puesto que ya hay un elemento que hemos ubicado en primera posición. Para el tercero ya tenemos dos colocados, por lo que solo podemos elegir entre los $n-2$ restantes. Si continuamos este proceso nos encontraremos que para colocar el penúltimo solo podemos elegir entre los dos que nos quedan sin colocar y en cuanto al último no disponemos de elección ninguna, estamos obligados a colocar el que nos queda.

Por tanto podemos concluir que

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 2$$

lo que obviamente coincide con la definición que hemos recordado de factorial de un número.

$$P_n = n!$$

Así por ejemplo, si disponemos de 6 corredores y queremos saber de cuantas formas pueden llegar a la meta tendremos

$$P_6 = 6! = 720$$

El segundo caso que consideraremos es cuando dado un conjunto se trata de elegir de forma ordenada una determinada cantidad de elementos.

Supongamos que tenemos m elementos y queremos calcular de cuantas formas podemos obtener n elementos distintos de forma ordenada. A esto lo denominaremos ***Variaciones de m tomadas de n en n***. Lo primero a considerar es que no podemos segregar más de los m elementos de que disponemos, en definitiva $m \geq n$. La nomenclatura que utilizaremos será V_m^n.

Para obtener esta cantidad procedemos de la misma forma que en el caso anterior. Para elegir el primero disponemos de todos los elementos, para elegir el segundo ya disponemos solo de $m-1$, para el tercero ya tenemos dos colocados, por lo que solo podemos elegir entre los $m-2$ restantes. Sin embargo como en este caso solo hay que elegir n elementos, quedan $m-n$ sin colocar, por lo que para elegir el último disponemos de $m-n+1$ posibilidades. Por lo tanto

$$V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1)$$

fórmula que podemos recordar como producto decreciente que se inicia en m y tiene n factores.

También es inmediato que

$$V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(m-n) \cdot (m-n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

en este caso un ejemplo podría ser si en una carrera en la que participan 8 corredores, de cuantas formas se pueden entregar las medallas de oro, plata y bronce.

$$V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

El último caso consiste en poder contar cuantos subconjuntos de un determinado tamaño podemos escoger de entre un conjunto de tamaño conocido. Es decir, supongamos que tenemos un conjunto formado por m elementos y queremos obtener cuantos subconjuntos de tamaño n podemos obtener. A esto lo denominaremos ***Combinaciones de m elementos tomadas de n en n***. Al igual que en el caso anterior, los subconjuntos no pueden tener un tamaño superior al del conjunto total, es decir $m \geq n$. La nomenclatura que utilizaremos será C_m^n.

Así, para la obtención de todos los subconjuntos de un determinado tamaño, un camino será obtener todas elecciones ordenadas de n elementos de entre un conjunto de tamaño m pero eliminando las distintas ordenaciones para unos determinados elementos.

Así, si tenemos el conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$ y queremos obtener subconjuntos de dos elementos, una vez seleccionados los elementos b, d lo que importan son esos elementos, no sus distintos ordenes: bd, db.

Sabemos que las elecciones ordenadas son las variaciones de m tomadas de n en n. También sabemos que las ordenaciones de n elementos son sus permutaciones. por lo tanto

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!/(m-n)!}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Por ejemplo, si disponemos de 5 botes de pintura de diferentes colores (azul, rojo, verde, amarillo y blanco) y queremos obtener colores *nuevos* mezclando 3 de los 5 que tenemos. ¿Cuántos colores *nuevos* podemos obtener?

Es obvio que cada vez que mezclemos 3 colores obtenemos un nuevo *color*. Luego el resultado será

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Pasemos ahora a ver qué ocurre cuando sí hay repetición. Vamos a considerar como incide la repetición en cada uno de los casos anteriores.

Ahora, el caso más sencillo es el de las ***variaciones con repetición***. Entenderemos que nos encontramos ante el siguiente esquema.

Tenemos una cierta cantidad de elementos de forma que de cada uno de ellos podemos obtener todas las *copias* que necesitemos, así que vamos a obtener una *palabra* a partir de ellos (vamos a ir colocando uno tras otro elementos del conjunto inicial donde cada elemento se puede colocar tantas veces como necesitemos) de un determinado tamaño (una determinada cantidad de elementos prefijada).

Así si tenemos los elementos ⊞, ⊠, ⋏, ⊖, ⋒ si queremos obtener variaciones con repetición de orden 3 algunos de los resultados serán

⊞ ⊠ ⊖;   ⋏ ⊖ ⊖;   ⊞ ⊠ ⊞;   ⊠ ⊠ ⊠

es decir, no está prefijada la cantidad de veces que se repite algún elemento.

De lo anterior podemos deducir que si disponemos de m elementos y queremos obtener variaciones con repetición de orden n para la elección del elemento que ocupa cada posición tenemos la totalidad de elementos disponibles. La nomenclatura que utilizaremos será RV_m^n. Así

$$RV_m^n = \overbrace{m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}^{n} = m^n$$

Es inmediato que en esta ocasión no es necesario que $n \leq m$.

Como ejemplo podemos obtener cuantas quinielas distintas se pueden rellenar.

En cada partido el resultado para la quiniela ha de ser 1, X o 2. Y esto para cada uno de los 14 partidos que intervienen en una quiniela. Luego el número pedido será

$$RV_3^{14} = 3^{14}$$

El siguiente caso a considerar son la ***permutaciones con repetición***.

Mientras que cuando no hay repetición las variaciones y las permutaciones están íntimamente ligadas (las permutaciones se pueden considerar un caso particular de las variaciones donde $m = n$) en este caso, las diferencias son muy importantes. Lo fundamental es que en el caso de las permutaciones la cantidad de veces que se repite cada elemento está prefijada desde un principio. Así, nos encontraremos con unos elementos que ya tienen ciertas repeticiones y nos piden que realicemos todas las ordenaciones posibles de estos elementos.

Así, si disponemos de las cifras $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ vamos a buscar números que tengan exactamente esas cifras, es decir $1\ \boxed{1}$, $2\ \boxed{3}$, $2\ \boxed{5}$ y $1\ \boxed{6}$, por ejemplo

$$\boxed{313565}$$

Para poder obtener todos los órdenes posibles consideraremos m el total de elementos (contando de cada uno tantas veces como aparezca, en el ejemplo anterior serian 6). Si hallamos P_m estamos considerando como casos distintos aquellos en los que solo realizamos una permutación interna de los elementos que se repitan. Para evitar esto dividiremos por todas las ordenaciones posibles de los elementos que se repiten.

La nomenclatura que utilizaremos será

$$RP_m^{n_1, n_2, \cdots\ n_r}$$

siendo $n_1, n_2, \cdots\ n_r$ las veces que se repite cada elemento. Por lo tanto

$$RP_m^{n_1, n_2, \cdots\ n_r} = \frac{m!}{n_1! \cdot n_2! \cdot\ \cdots\ \cdot n_r!}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leq m$ y el resto hasta m son elementos que no se repiten.

Como ejemplo podemos ver cuantas palabras (tengan sentido o no) podemos obtener con las letras de la palabra MANZANA.

Hay 2 N y 3 A. Además en total son 7 letras por lo que

$$RP_7^{2,3} = \frac{7!}{2! \cdot 3!} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 420$$

Finalmente veamos que ocurre con las ***combinaciones con repetición***. El concepto es el mismo que el de variaciones con repetición pero claro está donde el orden de colocación de los elementos no importa.

Si partimos del mismo ejemplo que en las variaciones con repetición

⊞, ⊠, ⅄, ⊖, ⋒

⅄ ⊖ ⊖ y ⊖ ⅄ ⊖

son un mismo caso. La nomenclatura sigue la misma línea: RC_m^n

Sin embargo la obtención de la fórmula que nos da lo que buscamos es algo más laboriosa en este caso.

Cada una de las distintas combinaciones con repetición viene determinada mediante la cantidad de veces que aparece cada uno de los elementos del conjunto inicial. Así

⅄ ⊖ ⊖

viene definido mediante

0 ⊞, 0 ⊠, 1 ⅄, 2 ⊖, 0 ⋒

y esta expresión vamos a modificarla según el siguiente criterio. Colocamos cada uno de los elementos del conjunto inicial y a continuación colocamos tantos $*$ como veces se repita ese elemento (si no aparece un elemento, no se le añade nada). En nuestro ejemplo será

⊞ ⊠ ⅄ $*$ ⊖ $*$ $*$ ⋒

observemos que las expresiones de este tipo siempre contienen a los m elementos del conjunto de partida y además tantos $*$ como elementos debe tener la combinación que estamos formando, es decir n. Por lo tanto estas expresiones están formadas por un total de $m+n$ elementos.

También es inmediato que el orden relativo en que aparecen los elementos del conjunto inicial siempre es el mismo, en nuestro ejemplo

⊞ ⊠ ⅄ ⊖ ⋒

y el primero de estos siempre estará en la posición nº 1 (en este caso ⊞) luego de los

$m+n$ elementos, como el primero siempre es el mismo, solo podrán considerarse cambios en los $m+n-1$ restantes. Sin embargo, los $*$ se repiten n veces y los

$m-1$ elementos del conjunto inicial (quitando el primero que ya hemos dicho que ocupa la posición inicial) no pueden cambiar su orden relativo, por lo que el numero de expresiones diferentes con los $m+n$ elementos indicados será

$$RP_{m+n-1}^{m-1,n}$$

puesto que un elemento se repite n veces y los $m-1$ restantes no pueden cambiar su orden (desde un punto de vista práctico es como si se repitiesen).

$$RC_m^n = RP_{m+n-1}^{m-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\cdot n!} = \binom{m+n-1}{n} = C_{m+n-1}^n$$

por lo que la fórmula resultante es fácil de recordar, la combinaciones con repetición de m elementos tomadas de n en n coinciden con las combinaciones ordinarias de la suma de ambos números menos 1 y se siguen tomando de n en n.

El ejemplo más habitual en este caso es ¿Cuantas fichas tiene un dominó?

Las fichas del dominó están formadas por dos partes y en cada una de ellas hay una determinada cantidad de puntos, desde 0 (blanca) hasta 6 donde sabemos que hay fichas *dobles*. En definitiva cada ficha está formada por dos números del conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ donde se permite la repetición y el orden no importa, por lo que el número de fichas que tiene el dominó será

$$RC_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$