Guía 3. Semejanzas de triángulos, Teorema de Tales, Teorema de la Bisectriz, Teorema del Seno.

Sofía Taylor

Enero 2011

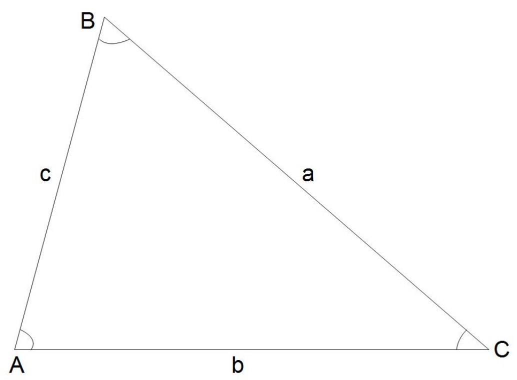
1 Principios Teóricos

1.1 Semejanza de Triángulos

Se dice que un triángulo es semejante a otro cuando sus ángulos internos son respectivamente congruentes. Esto implica que cada lado de un triángulo tiene un análogo en el otro, y cada par guarda una proporción específica.

Para comprender esto, conviene pensar en un triángulo como la ampliación o reducción de otro. Así, los ángulos de cada triángulo se mantienen, pero los lados pueden ser diferentes.

Para estudiar las condiciones de semejanza, consideremos que a, b y c son los lados de un triángulo y A, B y C los ángulos internos opuestos a a, b y c respectivamente.



Consideremos otro triángulo de lados a', b' y c' y ángulos A', B' y C'. Para demostrar que son semejantes, se pueden utilizar tres criterios:

1. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

2. Un par de lados correspondientes proporcionales $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\right)$ y los ángulos comprendidos iguales ($C = C'$)

3. Tienen dos pares de ángulos iguales, por ejemplo: $A = A'$ y $C = C'$

Notamos que el último criterio implica que los tres ángulos son iguales, ya que la suma de ángulos internos de un triángulo es siempre $180\,°$. Por lo tanto, si se demuestra la igualdad para dos pares de ángulos, inevitablemente el tercer par también la cumple.

1.2 Teorema de Tales

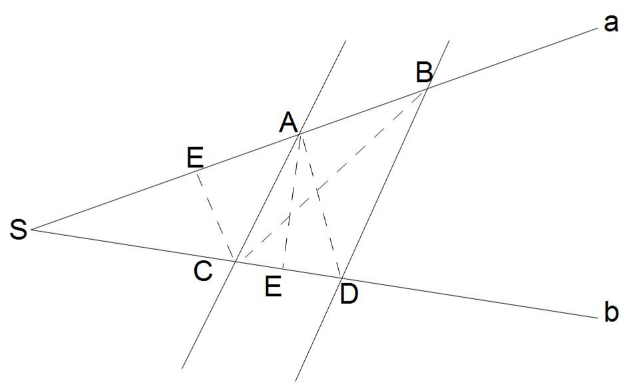
El Teorema de Tales determina que si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Formalmente, sean $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n$ un conjunto de rectas paralelas. Las rectas a y b, que no son paralelas a las l_i, cortan a $l_1, \ldots, l_n$ en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ respectivamente. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \cdots = \frac{A_{n-1}A_{n-1}}{B_nB_n} \tag{1}$$

Demostración Utilizaremos el conepto del área de un triángulo y denotemos el área de $\triangle ABC$ como $|\triangle ABC|$.

Consideremos dos rectas paralelas que intersectan a las rectas a y b.



Como la distancia entre las dos rectas paralelas es constante: $|\triangle ACD| = |\triangle ACB|$ y por lo tanto $|\triangle SCB| = |\triangle SAD|$. Al combinar estos resultados obtenemos:

$$\frac{|\triangle SCA|}{|\triangle ACD|} = \frac{|\triangle SCA|}{|\triangle ACB|} \tag{2}$$

y

$$\frac{|\triangle SCA|}{|\triangle SAD|} = \frac{|\triangle SCA|}{|\triangle SCB|} \tag{3}$$

Sabemos que:

$$|\triangle ABC| = \frac{base \cdot altura}{2} \tag{4}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{SC \cdot AF}{CD \cdot AF} = \frac{SA \cdot EC}{AB \cdot EC} \tag{5}$$

$$\frac{SC \cdot AF}{SD \cdot AF} = \frac{SA \cdot EC}{SB \cdot EC} \tag{6}$$

Cancelando los factores comunes, obtenemos:

$$\frac{SC}{CD} = \frac{SA}{AB} \tag{7}$$

$$\frac{SC}{SD} = \frac{SA}{SB} \tag{8}$$

Y finalmente,

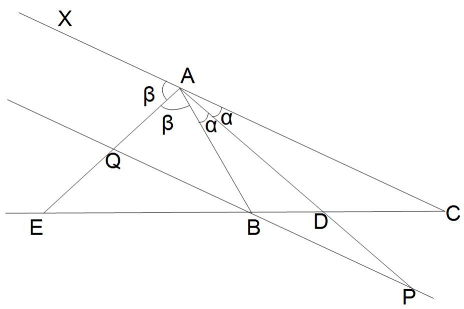
$$\frac{SC}{SA} = \frac{CD}{AB} = \frac{SD}{SB} \tag{9}$$

1.3 Teorema de la Bisectriz

En un trángulo, las rectas que dividen por la mitad los ángulos internos se llaman *bisectrices*. El Teorema de la Bisectriz enuncia que las bisectrices internas y externas de un ángulo en un triángulo cortan al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicho ángulo. Es decir, la bisectriz interna del ángulo BAC corta a BC en D y la biscetriz externa corta a la extensión de BC en E tal que:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \tag{10}$$

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \tag{11}$$



Demostración De la figura se puede ver que $2\alpha+2\beta = 180\,^\circ$ y por lo tanto $\alpha+\beta = 90\,^\circ$. Es decir que la bisectriz interna y externa son perpendiculares. La recta PQ es paralela a AC y $\angle CAD = \angle APB = \alpha$ ya que son alternos internos. Como $\angle BAD = \alpha$ concluimos que $\triangle ABP$ es esóceles y $AB = BP$ Análogamente, $\angle BQA = \angle QAR = \angle QAB = \beta$. Por lo tanto $\triangle QBA$ es isóceles y $AB = BQ$

Los triángulos BDP y CDA son semejantes (Demostrar como ejercicio), de donde

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{AC} = \frac{AB}{AC} \tag{12}$$

Igualmente, los triángulos BEQ y CEA son semejantes,

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BQ}{AC} = \frac{AB}{AC} \tag{13}$$

1.3.1 Corolario del Teorema de la Bisectriz

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BC}{AB + AC} \tag{14}$$

Demostración Del Teorema de la Bisectriz se tiene:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \tag{15}$$

Se puede demostrar que para todo a, b, c y d, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \tag{16}$$

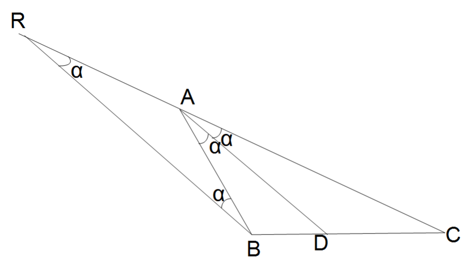
Esto se puede demostrar por una manipulación algebraica sencilla. También se puede demostrar geométricamente utilizando el Teorema de Tales. Intente demostralo por ambos métodos como ejercicio. Así obtenemos que:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AC + AB} \tag{17}$$

De donde:

$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}, \quad DC = \frac{AC \cdot BC}{AC + BC} \tag{18}$$

Este corolario también puede demostrarse geométricamente de forma similar al Teorema de la Bisectriz. Tracemos una recta paralela a la bisectriz AD que corta a la recta AC en R. Sabemos que $\triangle ADC$ también es semejante a $\triangle RBC$.



Por otro lado, $\angle ABR = \angle BAC$, entonces en triángulo BAR es isósceles y $AB = AR$. Por lo tanto, $RC = AB + AC$. Así llegamos a:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{BC}{RC} \tag{19}$$

Y finalmente,

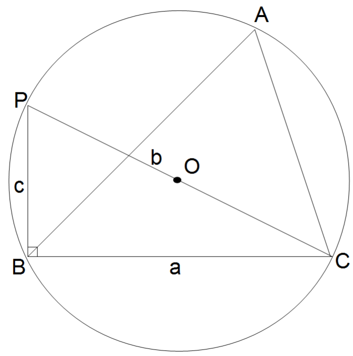
$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BC}{AC + AB} \tag{20}$$

1.4 Teorema del Seno

En un triángulo, sean A, B, y C los ángulos internos y sean a, b y c los lados opuestos a dichos ángulos.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \tag{21}$$

Demostración



En la figura se ve el circuncentro O, el circuncírculo de un triángulo y un diámetro BP. Se sabe que ángulo BCP es recto ya que circunscribe un diámetro. Además el $\angle A = \angle P$ ya que circunscriben el mismo arco BC. Entonces,

$$\operatorname{sen} \angle A = sen \angle P = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{2R} \tag{22}$$

De esto resulta:

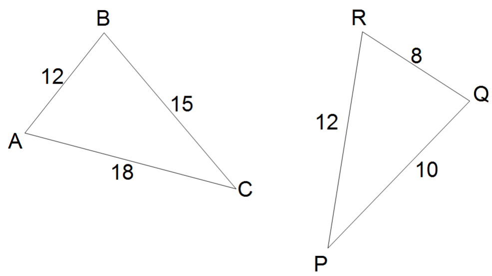
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \angle A} = 2R \tag{23}$$

Se puede repetir el proceso anterior para los ángulos en B y C y se obtiene el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \angle A} = \frac{b}{\operatorname{sen} \angle B} = \frac{c}{\operatorname{sen} \angle C} = 2R \tag{24}$$

2 Problemas Resueltos

1. Demostrar que los trángulos en la figura son semejantes



Solución Como los datos del problema son de los lados de los triángulos, debemos usar el criterio de semejanza que se refiere a las proporciones entre dichos lados. Por lo tanto, primero debemos identificar los pares de lados.

Si el triángulo es semejante, las proporciones entre los lados del triángulo se mantienen, por lo tanto, el lado de mayor longitud de un triángulo será el homólogo al lado de mayor longitud del otro, y análogamente para el de longitud menor e intermedia.

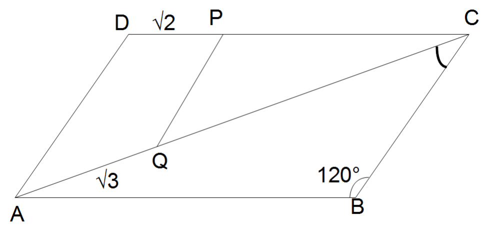
Ahora sólo queda estudiar la proporción entre cada par:

$$\frac{AC}{RP} = \frac{3}{2}, \frac{BC}{PQ} = \frac{3}{2}, \frac{AB}{RQ} = \frac{3}{2} \tag{25}$$

Como la proporción es la misma, los triángulos son semejantes.

2. Sea ABCD un paralelogramo, y PQ un segmento paralelo a AD con P y Q en los segmentos DC y AC respctivamente. $\overline{AQ} = \sqrt{3}$ y $\overline{DP} = \sqrt{2}$. Además se sabe que $\measuredangle ABC = 120\,°$. Encontrar el valor de $\measuredangle BCA$.

Solución Como sabemos, al resolver un problema de geometría conviene realizar un dibujo o esquema con los datos del problemas. Podemos ver de la figura que $\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser un paralelogramo.



Por el Teorema de Tales, se sabe que:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DP}{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tag{26}$$

Luego, por el Teorema del Seno en $\triangle ABC$, tenemos que:

$$\frac{\sin \angle ABC}{AC} = \frac{\sin \angle BCA}{BA} \tag{27}$$

$$\sin \angle BCA = \sin 120\,° \cdot \frac{AB}{AC} \tag{28}$$

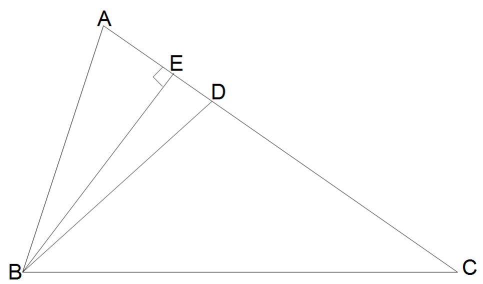
$$\sin \angle BCA = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{29}$$

Por lo tanto, llegamos a que $\angle BCA = 45\,^\circ$

3. El triángulo ABC es recto en el ángulo B. La bisectriz de $\angle B$ divide al lado AC en segmentos cuya proporción es $\frac{3}{4}$. Si se traza la altura que pasa por el vertice B, en qué proporción cortara al lado AC.

   Solución Sean D y E los pies de la bisectriz y la altura en AC respectivamente. Por el Teorema de la Bisectriz tenemos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{4} \tag{30}$$



   Luego, $\triangle AEB \sim \triangle ABC$ ya que comparten el ángulo CAB y ambos tienen un ángulo recto. Análogamente, $\triangle BEC \sim \triangle ABC$ ya que comparten el ángulo BCA y ambos tienen un ángulo recto. Entonces,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{BC} \tag{31}$$

   Finalmente se multiplican las dos ecuaciones anteriores y se obtiene:

$$\frac{AE}{CE} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \tag{32}$$

3 Otros Problemas

1. Estudiar los recíprocos del Teorema de Tales y el Teorema de la Bisectriz. Es decir:

   - $l_1, l_2, \ldots, l_n$ son un conjunto de rectas y las rectas a y b las cortan en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ respectivamente. Demostrar que si se cumple lo siguiente:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_{n-1}}{B_nB_n} \tag{33}$$

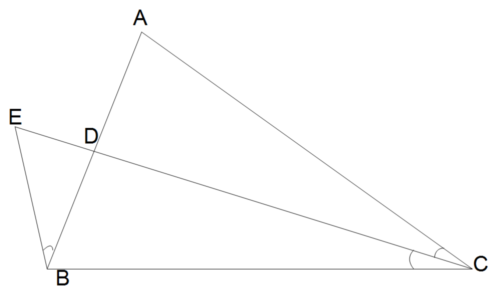
Entonces las rectas l_i son paralelas

- Sea D un punto del segmento BC en el triángulo ABC. Demostrar que si $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, entonces AD es la bisectriz de $\angle BAC$

2. Un triángulo tiene lados a, b y c que miden 24, 18, 36. Otro triángulo tiene lados d, e y f que miden 12, 16 y 24 respectivamente. Determine si los triángulos son semejantes.

3. En el triángulo ABC, E es el pie de la altura que pasa por C, y D es el pie de la altura que pasa por A. Demostrar que $CE \cdot AB = AD \cdot BC$

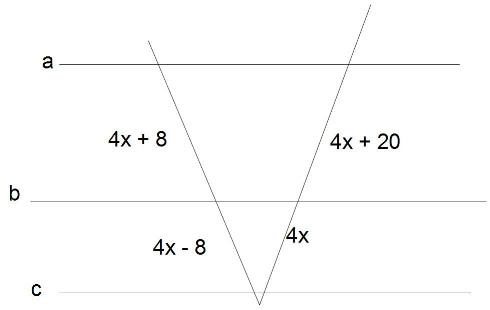
4. Si en $\triangle ABC$, CD es la bisectriz de $\angle BCA$ y $\angle ABE = \angle ACD$, demostrar que $\triangle ACD \sim \triangle DBE$ y que $\triangle ADC \sim \triangle CEB$



5. Si los segmentos AB y CD se cortan en un punto E tal que $CE \cdot EB = ED \cdot AE$, demostrar que los segmentos AC y BD que unen sus extremos, son paralelos.

6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con ángulo recto en B, y sean D y E puntos en los lados AC y BC respectivamente, tales que DE sea paralelo a AB. Si $AB = 15, DE = 3, AC = 25$, encontrar el valor de AD.

7. a, b y c son tres rectas paralelas. Encontrar el valor de X.

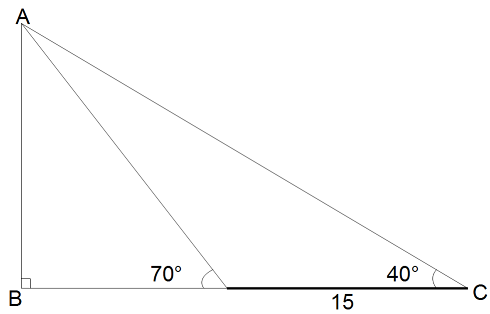


8. En un triángulo ABC, D y E son puntos en AB y BC tal que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{1}{1}$. Si F es la intersección de AE y CD, encuentre el valor de $\dfrac{CF}{FD}$. (Sugerencia: trace una paralela al lado CB que pase por D)

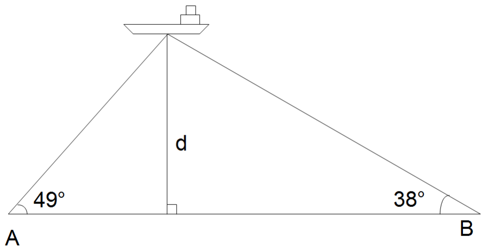
9. En un triángulo ABC, la bisectriz interna del $\angle A$ corta a BC en N. La bisectriz externa corta la extensión de BC en M. Si $BC = 5$, $AC = 6$ y $AB = 4$, entontrar el valor de MN

10. Los lados de un triángulo son a, b y c y sus ángulos opuestos respectivos son A, B y C. $a = 49$, $b = 16$ y $A = 115\,^\circ$. Encontrar el valor de B.

11. En la siguiente figura $CD = 15$. Encontrar BC.



12. El punto A está a 10Km de B. Desde cada punto se observa un barco a una distancia d de la costa. Encontrar d.



13. Sea P un punto del lado BC en un triángulo ABC. Se tiene que $AB = 20$, $AC = 10$,$BP = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$, $CP = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. Encontrar el valor de $\measuredangle BAP - \measuredangle CAP$.

14. Utilizando el Teorema de Tales, explique como dividir un segmento dado en n segmentos de igual longitud con regla y compás.

15. Si la bisectriz de $\angle BAC$ corta el lado BC en D y AB es distinto de AC, demostrar que:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{BC}{|AC - AB|} \tag{34}$$