Separadores y Principio de Inclusión-Exclusión

Entrenamiento #6 para 4ª etapa
22-24 de julio de 2016
Por: Clemente

Resumen

–Bienvenido de vuelta, te estaba esperando– Dijo la combinatoria mientras afilaba sus grandes garras. –No te asustes, nomás anda de enfadosa– Se apresuró a decir el joven entrenador.

Nos encontramos de nuevo con un tema de combinatoria, aunque éste no es uno tan mainstream como debería de serlo. Se trata de ¡separadores! Tal vez estarás pensando: "¿Nos van a poner a leer libros?", bueno, la cosa no va por ahí, aunque si quieres que te pongan a leer, Lulú y Argel te pueden ayudar.

El tema es bastante útil para los problemas de conteo, aunque esta medio raro de explicar, así que espero que con un ejemplo entiendas. ¡Oh! Casi lo olvido, también veremos otro tema conocido como Principio de Inclusión-Exclusión.

1. De separadores y algo más.

Bueno, iniciemos ya con los separadores. Como el nombre lo dice, separadores se asemeja a los separadores de los libros, aunque en este caso se utilizan para separar elementos de un conjunto en problemas de conteo. Tu estarás diciendo "¿Qué?" y yo estaré diciendo "Si", Tu no estarás captando y yo me estaré riendo.

Como realmente no dije nada, mejor procedo a un ejemplo ilustrativo para que veas la utilidad de los separadores y cómo es que éstos se parecen a los separadores de libros.

1.1. Ejemplo ilustrativo.

¿Cuántas palabras de tres letras hay, tales que se pueden usar las letras $\{a, b, c, d, e\}$ *y que el orden de las letras no importa?*

Con tus conocimientos actuales de combinatoria, no hay manera de resolver el problema de golpe y lo más probable es que optares por dividir el problema en tres casos:

1. Palabras con todas las letras iguales.
2. Palabras con dos letras iguales y una diferente.
3. Palabras con todas las letras diferentes.

Los cuales si son atacables por el tamaño reducido del problema. Pero en aras de resolver el problema con cuentas más sencillas, le daré un enfoque que a primera vista será creativo y poco intuitivo, pero que si lo practicas, lo dominarás rápidamente y será una gran herramienta más en tu arsenal.

Para resolver el problema, se representan las letras de cada palabra por guiones bajos: _ . Los ya tan mencionados separadores por fin se van a utilizar y se representan con una barra vertical: $|$.

Y bueno, ¿Dónde se colocan los separadores? y mas importante, ¿Qué separan? Pues se ponen junto a los guiones bajos y se utilizan para separar las letras. ¿Cuántos separadores se deben utilizar? En este caso 4. ¿Pero por qué deben ser 4? Por la manera en que, valga la redundancia, los separadores separan, la cual es como sigue:

- A la izquierda del primer separador van las a's.
- Entre el primer y el segundo separador van las b's.
- Entre el segundo y tercer separador van las c's.
- Entre el tercer y el cuarto separador van las d's.
- A la derecha del cuarto separador van las e's.

Nota: entre separadores no necesariamente habrán guiones bajos.

Para dejar en claro todo lo que he dicho hasta ahora y mostrarte que es una manera sencilla con la que se pueden representar todas las palabras, mira:

1. El arreglo |__||_| representa la palabra *bbd*.
2. El arreglo __||_|| representa la palabra *aac*.
3. El arreglo |_||_|_ representa la palabra *bde*.

¿Ya viste por qué se llaman separadores? Si no, con mucha imaginación, piensa que cada arreglo es un libro, cada guión bajo es una página y los separadores son... pues los separadores.

Bueno, para terminar con el problema, hay que notar que cada arreglo con separadores representa una palabra distinta, entonces sólo falta saber cuántos arreglos distintos se pueden dar. Dado que cada arreglo tiene 7 espacios, 4 para separadores y 3 para letras, es fácil ver que en total se pueden dar $\binom{7}{4} = 35$ arreglos distintos, lo que equivale a 35 palabras distintas. Si no se te hizo tan obvio el porqué del $\binom{7}{4}$, piénsalo así: una vez colocados los 4 separadores en los 7 espacios, las 3 letras quedan definidas por los separadores. Entonces sólo queda pensar en cuántas maneras hay de poner los separadores.

Sólo queda resaltar algunas cosas:

- Si lo comparan con el resultado que les darán los casos, verían que dan lo mismo (se los dejo de tarea).
- Lo único que hizo largo al ejemplo fue la explicación, realmente la parte matemática es mucho mas corta que si lo hubieran hecho por casos.
- Separadores sólo funciona cuando tienes un problema en el que puedes repetir elementos de un conjunto y que el orden en el resultado no te importa. En este caso las palabras "aab", "aba" y "baa" son la misma.
- Si en vez de pensar en las maneras de colocar los separadores, hubiera pensado en la manera de colocar los guiones bajos, ¿Hubiera dado el mismo resultado?¿Por qué?

2. Del Principio de Inclusión-Exclusión y algo más.

Esta parte se va a poner un poco mas técnica, así que échatela con calma. Procuraré explicarla de la forma más clara posible. Primero deberé darte unas definiciones. La mayoría ya las conocías de 3^{ra} etapa.

a) **Conjunto:** Es un montón de cosas. Es como una categoría o clasificación. Los animales, los números pares, los alumnos en este salón son todos ejemplos de conjuntos.

b) **Subconjunto:** Es un conjunto más pequeño que se encuentra adentro de otro. Utilizando los mismos ejemplos anteriores: las aves, los animales de África, los cuadrúpedos, todos son ejemplos de subconjuntos del conjunto "animales"; los múltiplos de cuatro, son un ejemplo de subconjunto para el conjunto "números pares"; las alumnas de este salón, o los Jaguares en el aula son dos ejemplos distintos de subconjuntos para el conjunto "alumnos en este salón". Para decir que A es un subconjunto de B, se escribe: $A \subset B$.

c) **Elemento:** Es cada uno de los componentes de un conjunto. Cada elemento es un subconjunto por sí mismo, pero ya no puede subdividirse.

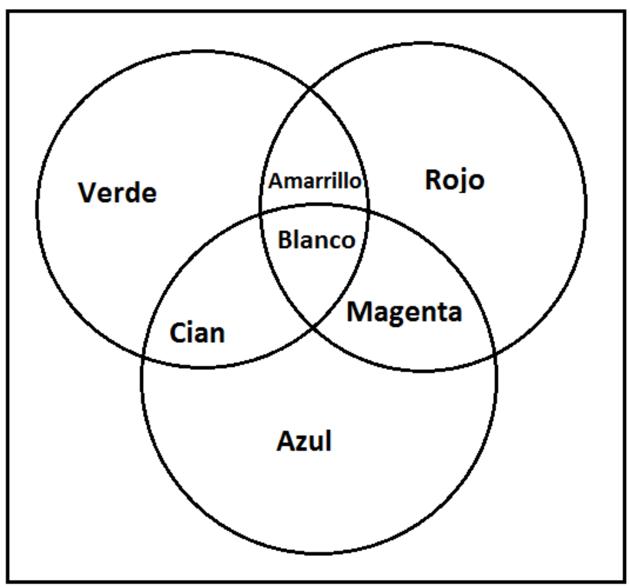
d) **Conjunto vacío:** Es un conjunto que consiste de nada. En serio, vilmente es considerar la existencia de una categoría en la que no hay nada. Se representa con el símbolo $\emptyset$.

e) **Universo:** Es el conjunto más grande que se puede tener, no hay nigún elemento que se quede fuera de él. Claro que éste conjunto universo depende de la situación. Por ejemplo, si tenemos los conjuntos de los peces, los animales invertebravos, las aves y los mamíferos, el conjunto universo en este caso sería el conjunto de todos los animales.

f) **Unión de dos conjuntos:** Algo así como la fusión en Dragon Ball Z o el megazord de los Power Rangers, se trata de juntar todos los elementos de dos conjuntos en un solo conjunto. Se representa por el símbolo $\cup$, parecido a la letra mayúscula "U", pero no son lo mismo. La unión del conjunto de todos los enteros pares con el conjunto de todos los enteros impares resulta en el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$).

g) **Intersección de dos conjuntos:** Esto se trata de todos los elementos que comparten o tienen en común dos conjuntos. Esto se representa por el símbolo $\cap$, parecido a la letra minúscula "n", pero no lo es. Por ejemplo, la intersección del conjunto de los pares con el conjunto de los múltiplos de 3 es igual al conjunto de los múltiplos de 6.

h) **Diagrama de Venn:** Es un dibujo para facilitar el manejo de los conjuntos. Un rectángulo representa mi universo, o sea, todos los elementos que voy a considerar. Luego con circulitos se representan los conjuntos y subconjuntos que están dentro de este universo. Si tomamos en cuenta todos los animales y tomamos tres conjuntos de estos animales, las aves, los animales que vuelan y los animales que nadan; ejemplos de las intersecciones de estos conjuntos se observan en el diagrama de acá abajo.



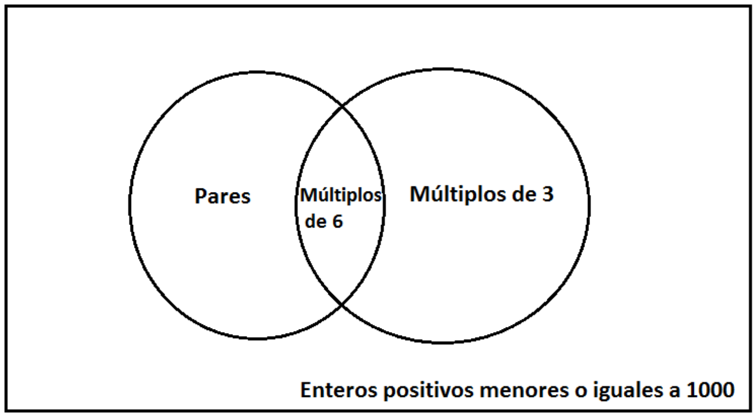
i) **Cardinalidad de un conjunto:** Esto es la cantidad de elementos que tiene un conjunto. Se representa de la misma manera que el valor absoluto, $|S|$.

Con estas definiciones vamos a ver un ejemplo para ir conociendo de que trata el Principio de Inclusión-Exclusión (de ahora en adelante lo abreviaré **PIE**).

2.1. Un ejemplo introductorio.

Encuentra la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 1000 que son múltiplos de 2 o 3.

Sin pensarlo mucho pudieras pensar: "Hay que sumar la cantidad de pares y la cantidad de multiplos de 3 y listo". Si pensaste ésto, vas por buen camino, pero se te fue un detashe muy importante: estas contando dos veces los múltiplos de 6. Si no se te hace obvio el por qué, ahí te va el diagrama de Venn para este problema. Espero se te haga simple de entender.



Los pares son todos los números que están dentro del círculo de la izquierda y los múltiplos de 3 todos los números que están en el círculo de la derecha. Cuando juntas ambos conjuntos estás contando dos veces el área en la que se intersectan ambas circunferecias. Si quieres colorea los círculos con colores distintos.

Así que la solución al problema sería ahora: Sumas la cantidad de pares con la cantidad de múltiplos de 3 y a ésto le restas la cantidad de múltiplos de 6. La cantidad de pares es: $\frac{1000}{2} = 500$. La cantidad de múltiplos de 3 es: $\lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$. La cantidad de múltiplos de 6 es: $\lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$. Y la respuesta al problema es: $500+333-166 = 667$.

Poniendo ésto de una manera un poco más formal, con las definiciones que te di, lo que se hizo fue: Sea A el conjunto de todos los pares menores o iguales a 1000. Sea B el conjunto de todos los múltiplos de 3 menores o iguales a 1000. Entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2.2. Ahora si el PIE.

Sea S el conjunto universo y $A_i \subset S$, donde $1 \leq i \leq n$, entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1,k=1}^{n} |A_i \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Donde $i \neq k$. En este momento tu estarás diciendo: "¿Que?". Así que te dejaré los casos $n = 3$ y $n = 4$ (el $n = 2$ ya lo dije).

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

Si el caso $n = 4$ o el caso general se te hacen muy grandes como para visuarlos, te recomiendo el enfoque por áreas del diagrama de Venn que mencioné brevemente en el ejemplo. Unos cuantos colores tambien ayudarían, pero en escencia vas a ir alternando los signos en cada parte de las sumatorias.

3. Agregados culturales

1. La cardinalidad del conjunto de los naturales es $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, lo cual se lee como Aleph-cero.
2. Ésta es la primer lista redactada por Clemente.
3. En los entrenamientos del verano del 2012 hubo un periodo en el que cada semana hablábamos de cucarachas, desde anécdotas hasta características biológicas.
4. OMM no son sólo las siglas para Olimpiada Mexicana de Matemáticas, también significa Olimpiada Mexicana de Mandilones.
5. Regularmente cuando un olímpico(a) tiene novia(o) suelen tener pase directo al nacional de la OMM, pero Argel sin tener novia es el rey de los mándilones. Si no lo crees, Fernando lo demostró.
6. Clemente se ha ganado el apodo de "El chico del metro".
7. Las ardillas recién nacidas miden aproximadamente una pulgada y son endiabladamente tiernas.

4. Ejercicios

1. En una tienda dan 4 tipos de dulces. ¿De cuantas formas se pueden comprar 10 dulces?
2. ¿De cuantas maneras se pueden servir 15 vasos de jugos, si se tienen jugos de manzana, mango, piña, naranja y guanábana?
3. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 (inclusive) hay tales que son múltiplos de 4, 5 o 6?
4. Cuenta la cantidad de impares positivos menores que 120 que no sean múltiplos de $3, 5$ o 7.
5. Determina la cantidad de números primos menores que 111

5. Problemas de separadores

1. Encuentra el total de pares ordenados de enteros positivos (x, y), tales que $x + y = 2016$.
2. Mismo problema, pero con (x, y, z) tales que $x + y + z = 2016$
3. Sea n un entero positivo. Encuentra el total de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$.
4. Sea n un entero positivo. Encuentra el total de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$.
5. ¿cuántos términos tiene la expansión de $(a + b + c)^5$?
6. Demuestra que el número de formas de escoger k objetos de un total de n objetos, en donde el orden no importa pero se pueden repetir objetos, es igual a $\binom{n+k-1}{k}$.
7. Encuentra de cuántas maneras es posible sustituir cada guión bajo con enteros del 1 al 8 (es posible que se repitan o que algunos números no aparezcan) en la siguiente expresión: $1 \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq 8$
8. Encuentra la cantidad de números naturales menores que 10000 cuyas cifras sumen 9.
9. Encuentra el total de tripletas ordenadas (x,y,z) de enteros no negativos tales que $x + y + z \leq 20$
10. Encuentra el total de cuartetas ordenadas de enteros (a, b, c, d) tales que $a + b + c + d = 100$ y además que $a \geq 30$, $b > 21$ y $c, d \geq 1$

11. Seis cajas están numeradas del 1 al 6. ¿De cuántas formas se pueden repartir 20 pelotas idénticas entre las cajas de tal manera que ninguna de ellas quede vacía?

12. ¿De cuántas formas se puede dividir un collar circular hecho con 30 perlas idénticas en 8 pedazos (sólo se permite cortar entre las perlas)?

13. 30 personas votan por 5 candidatos. ¿Cuántas distribuciones posibles de los votos hay, si cada una de las personas vota por uno y sólo un candidato, y sólo nos interesa la cantidad de votos recibida por cada candidato?

14. En un monedero hay 20 monedas de 20 centavos, 20 de 50 centavos y 20 de un peso. ¿De cuántas formas puedes elegir 20 monedas de entre estas 60?

15. ¿De cuántas formas se pueden distribuir siete pelotas blancas y dos negras en nueve bolsas? Algunas de las bolsas pueden quedar vacías y las bolsas son distinguibles entre sí.

16. ¿Cuántas maneras hay de repartir 4 pelotas negras, 4 blancas y 4 azules en 6 cajas distintas?

17. ¿Cuántas soluciones hay para la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ tales que $0 \leq x_i \leq 5$?

18. Un panadero vende tres tipos de panes: donas, conchas y trenzas. Le quedan 9, 3 y 5 de cada uno, respectivamente. ¿De cuántas maneras se puede ordenar una docena de panes?

19. ¿De cuántas maneras puedes escoger 5 elementos no consecutivos del conjunto 1, 2, 3,...,15?

20. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir m pelotas en n cajas distinguibles, de manera que en cada caja haya al menos una pelota?

6. Problemas de PIE

21. En cierto juego se tiene un dado de seis caras. El juego consiste en tirar el dado 5 veces y el jugador gana si en la última tirada salió el mismo número que en la penúltima tirada. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

22. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los números del 1 al 10 en fila, de tal manera que los número $1, 2, 3, 4, 5$ no queden en su lugar?

23. A un baile de graduación asisten n parejas. En cierta canción, cada pareja debe separarse, y después se vuelven a formar n parejas de manera que a nadie le tocó su pareja original. ¿De cuántas maneras puede ocurrir esto?

24. ¿Cuántas permutaciones de los números $1, 2, ..., n$ hay, tales que no hay números adyacentes que sean consecutivos?

25. Sea n un número natural, demuestra que la cantidad de enteros positivos primos relativos con él se calcula de la forma $\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{P_K}\right)$, donde los P_i son los primos que aparecen en la descomposición canónica de n.

26. Se dice que una mano de dominó tiene *falla* si alguno de los números entre el 0 y el 6 no está en la mano. Calcula la cantidad de manos que no tienen fallas.

27. ¿Cuántas manos de póker hay, tales que se tiene al menos una carta de cada palo?

28. Encuentra el número de permutaciones de los números 1,2,3,4,5,6,7 de manera que queden exactamente tres números fijos.

29. ¿De cuántas formas se pueden colocar tres a, tres b y tres c de modo que no aparezca la misma letra tres veces consecutivas?

30. Considérese el conjunto de todos los números enteros cuya notación decimal es $\overline{ab}$ con a y b del 1 al 5. Por cada elección de cuatro de estos números considerar todos los dígitos que son necesarios para la formación de estos cuatro. (Por ejemplo, si los cuatro números escogidos son 15, 31, 35 y 54, entonces los dígitos necesarios para su formación son 1, 3, 4 y 5; el dígito 2 no se usó.) ¿Cuántas colecciones de cuatro de esos números necesitan todos los dígitos del 1 al 5?

31. ¿Cuántos números existen entre 1 y 1000 (ambos inclusive) que no sean cuadrados perfectos, ni cubos perfectos ni cuartas potencias?

32. ¿De cuántas maneras pueden tres matrimonios sentarse en seis sillas de una fila, de manera que se alternen hombre-mujer y que nadie quede junto a su pareja?

33. Cada cuadrito de un tablero de 3×3 se pintará de rojo o azul. Cada cuadrito tiene la misma probabilidad de ser pintado tanto de rojo como de azul. ¿Cuál es la probabilidad de que en el tablero no haya cuadros de 2×2 rojos?

34. Una permutación $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ del conjunto $1, 2, .., 2n$, donde n es un entero positivo, se dice que tiene la *propiedad P* si para alguna i que vaya desde 1 hasta $2n - 1$, se cumple que $x_i - x_{i+1} = \pm n$. Demuestra que para cualquier n hay mas permutaciones con la *propiedad P* que sin ella.

35. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con n elementos en las que dos de ellos, a y b, no estén juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, a, b y c (en cualquier orden)? ¿Y en las que ningún par de los elementos a, b y c esté junto?

36. Un encuadernador debe encuadernar 12 libros diferentes en rojo, verde y azul. ¿De cuántos modos puede hacerlo, si por lo menos un libro debe estar encuadernado en cada color?

37. ¿De cuántos modos se pueden permutar las letras de la palabra "tictac" si dos letras iguales no pueden ir una a continuación de la otra? Lo mismo, pero para la palabra "tamtam"

38. Las casillas de un tablero de ajedrez se pintan de 8 colores, de modo que en cada fila horizontal se encuentren los 8 colores, y en cada fila vertical no se encuentren dos casillas juntas pintadas del mismo color. ¿De cuántas formas es posible hacer esto?

39. A un ascensor subieron 8 personas. ¿De cuántas maneras pueden bajarse en cuatro pisos, de modo que en cada piso salga por lo menos una persona?

40. ¿Cuántos números enteros no negativos, menores que un millón, contienen a todas las cifras 1, 2, 3 y 4? ¿Cuántos están formados solamente por estas cifras?