SEPARADORES Y CAMINOS

Erik Orson Delgado Romo

1. Separadores:

La técnica de separadores se usa para problemas de combinatoria donde se tengan que contar la cantidad de formas en las que se pueden distribuir objetos indistinguibles en compartimentos distinguibles. La pregunta más fácil que podemos resolver con esta técnica es: ¿de cuántas formas podemos distribuir n pelotas en k cajas?

Como ejemplo haremos que $k = 4$ y $n = 8$. Si representamos a una pelota con un asterisco y con una diagonal donde termina una caja y empieza otra, entonces:

*** * * / * * / * * / ***

3 pelotas en la primera caja, 2 en la segunda caja, 2 en la tercera caja y 1 en la cuarta caja es una manera valida de representar una forma de meter las 8 pelotas dentro de las 4 cajas.

Las diagonales separan a los 8 asteriscos en 3 diferentes posiciones pues solo se necesitan 3 para distinguir a las 4 cajas. Para formar cualquier configuración de 8 pelotas en 4 cajas podemos empezar con la siguiente cadena de caracteres:

*** * * * * * * ***

y poner 3 diagonales en alguna posición de la cadena, resultando en algo como:

/ / * * * / * * * * *

(0 en la primera caja, 0 en la segunda caja, 3 en la tercera…). Si notamos que la cadena final siempre tendrá 11 caracteres, y cada uno o es una diagonal o un asterisco, podemos hacer el siguiente procedimiento y el resultado final será el mismo:

- Empezamos con 11 espacios vacíos.
- Escogemos tres de los espacios y les ponemos diagonales.
- El resto de los espacios los hacemos asteriscos.

Ahora que sabemos que podemos representar todas las configuraciones de 8 pelotas en 4 cajas con una cadena de 11 caracteres donde elegimos 3 ellos para que representen una separación entre las cajas y los 8 restantes que representen las pelotas, podemos afirmar que la cantidad de formas en las que podemos meter 8 pelotas en 4 cajas es: $\binom{8+(4-1)}{4-1} = \binom{11}{3}$

En general para una cantidad de pelotas n y k cajas la solución a este problema es $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

Esta misma expresión se puede utilizar para planteamientos similares:

2. Problemas parte 1

1. ¿Cuántas diferentes sumas de enteros mayores de cero con hasta 8 términos suman 1084?

2. ¿Cuántas diferentes sumas de enteros mayores que cero con exactamente 8 términos suman 1084?

3. Si $a > 2, b > 3, c > 4, d > 5, e > 6$ ¿Cuántas diferentes soluciones hay para la ecuación $a + b + c + d + e = 555$?

4. Si dos cadenas se consideran iguales si son anagramas (ósea si cambiamos el orden de las letras en una cadena podemos crear la otra) ¿Cuántas diferentes cadenas de 5 letras del abecedario existen?

5. ¿Cuántas diferentes soluciones con enteros positivos a, b, c, d, e, f existen para la siguiente ecuación?

$$a + b + c + d + e + f \leq 100$$

6: ¿Cuántas soluciones enteras no negativas hay para la siguiente ecuación?

$$3x + y + z = 24$$

7: ¿Cuántas soluciones hay para la siguiente ecuación tales qué si $a, b, c, d, e, f \geq -37$?

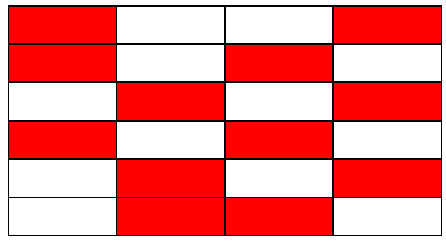
$$a + b + c + d + e + f = 17$$

8. Si Patricia selecciona 6 galletas de una caja que contiene 6 galletas de chocolate, 6 de avena y 6 de mantequilla. ¿De cuantas maneras lo puede hacer?

9. Sea N la cantidad de números de 7 dígitos con orden ascendente, se pueden repetir los números. ¿Cuál es el valor de N?

10. Tenemos una cuadricula de 6x4 donde vamos a colorear 12 de los 24 cuadrados, si queremos que hayan 3 cuadrados coloreados en cada columna y 2

cuadrados coloreados en cada renglón, ¿Cuántos diferentes cuadriculas coloradas podremos formar? Ejemplo:



11. En una secuencia de lanzamientos de moneda, se graban el resultado de cada lanzamiento secuencialmente, el resultado es una cadena donde A representa águila y S representa sol. Podemos notar en una cadena como la siguiente SSSAASASSSAASSA que hay dos subsecuencias de AA, tres de AS, cuatro SA y cinco SS. ¿Cuántas diferentes cadenas que representen el lanzamiento de 15 monedas tendrán la misma cantidad de subsecuencias AA, AS, SA, SS, como la cadena anterior?

12: Si D(n) denota la cantidad de formas en las que se puede escribir un entero positivo como un producto $n = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, donde $f_i > 1$ para $i = 1$ hasta $i = k$. ¿Cuál es el valor de D(96)?

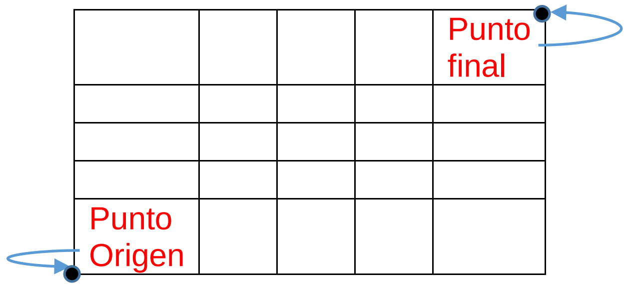
3. Datos de vital importancia

¿Creíste que eso había sido todo el material? Pues apenas vamos a la mitad del camino.

1. El 28 de marzo del 2011 se obtuvo un registro fotográfico digital de un ejemplar de ocelote en la Sierra del Laurel, en el municipio de Calvillo. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0065-17372013000300018&lng=es&tlng=es
2. El número de posiciones legales en una partida de ajedrez cualquiera en un instante determinado de la misma se estima en más de 1043. https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99

4. Caminos

Un problema muy relacionada a la de los separadores es la de los caminos, este en su forma más simple cuenta la cantidad de formas en las que se puede llegar de una esquina de una cuadricula a la opuesta solo con movimientos que te hagan avanzar.



Por ejemplo: La rana Rene está situada en el punto (0,0) de una cuadricula cartesiana, si solo puede moverse una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba a la vez, ¿De cuantas diferentes formas puede llegar al punto (5,5)?

Si notamos que cada una de las formas de llegar del punto (0,0) a (5,5) se puede escribir como una serie de instrucciones: derecha, arriba, derecha, derecha… Podemos transformar este problema de encontrar de cuantas diferentes formas se puede llegar de un punto a otro, a un problema donde se tenga que contar cuantas diferentes formas existen para hacer una lista de instrucciones que nos lleve al punto.
Para llegar desde el origen hasta cualquier punto $(x,\ y)$, con $x, y > 0$, necesitamos que hayan 'x' instrucciones que nos digan que vayamos a la derecha y 'y' instrucciones que nos digan que vayamos para arriba. Si nuestra lista de instrucciones no tuviera esas características no nos llevaría al punto, y cualquier lista con esas instrucciones en esas cantidades nos llevara al punto sin importar el orden en las que estén.

Por lo tanto, la cantidad de formas de llegar del origen a un punto $(x,\ y)$ será equivalente a la cantidad de listas que se pueden formar con 'x' instrucciones que te avancen en el eje x y 'y' en el eje y. Si representáramos a las instrucciones que te llevan a la derecha con una 'X' y las que te suben en el eje y con una 'Y' entonces un ejemplo de la forma en la que se pudiera escribir un camino del origen a (5, 5) pudiera ser:

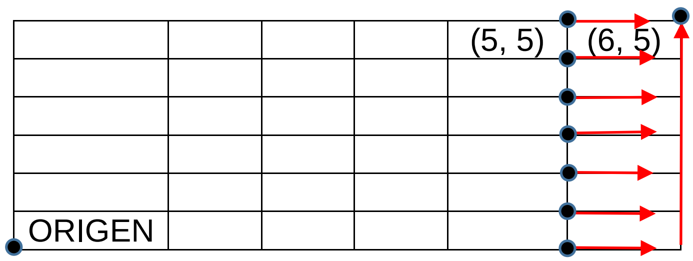
X X Y X X Y Y Y X Y

¿Cuántas diferentes cadenas de este tipo existen? Pues cualquier cadena se puede crear empezando una cadena de espacios vacíos de tamaño $(x + y) = (5 + 5) = (10)$, elegimos x de estos espacios para poner caracteres de 'X' y los demás los rellenamos con 'Y'. Entonces el problema se reduce de nuevo a elegir x de $x + y$, o sea, $\binom{x+y}{x} = \binom{10}{5}$.

5. Identidad del palo de Hockey

Si consideramos todos los caminos desde (0, 0) hasta $(x+1, y)$, con $x, y > 0$, podemos notar que todo camino tiene que cruzar un eje entre la recta x=m y x4=m+1 en algún momento, de ahí solo tiene una manera de llegar al punto final (subir hasta llegar hasta ahí). Por lo tanto la podemos deducir que si sumáramos todas las maneras de llegar a uno de esos ejes, esto sería equivalente a la cantidad de formas de llegar hasta $(x+1, y)$. Escrito de manera matemática esto es:

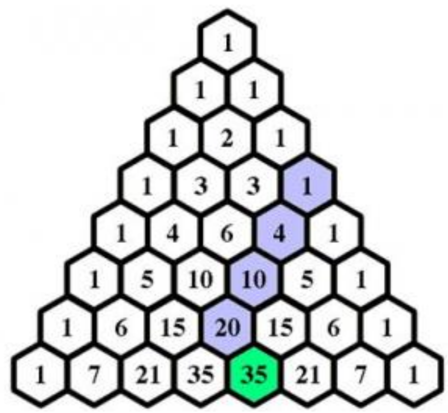
$$\sum_{k=0}^{y} \binom{x+k}{x} = \binom{x+y+1}{x+1}$$



Ilustrado: La cantidad de formas para llegar desde el origen hasta (6, 5) es igual a la cantidad de formas de llegar hasta (5, 0), más la cantidad de formas de llegar hasta (5, 1), más la cantidad de formas de llegar hasta (5, 2)…

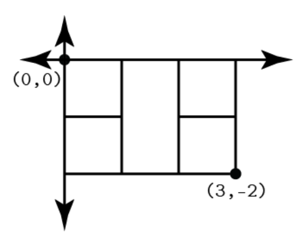
Otra forma de ver esta identidad es con el triángulo de Pascal, para esto recordemos que el número $\binom{a}{b}$ se encuentra en el renglón a y en la posición b de forma horizontal. Entonces, $\sum_{k=0}^{y} \binom{x+k}{x}$ es igual a la suma de los números desde el renglón x hasta el renglón $x+y$ que se encuentren en la posición horizontal x, según la identidad del palo de Hockey, la suma será igual al número que se encuentre en el renglón $x+y+1$ y en la posición horizontal $x+1$.

Por ejemplo, para $\sum_{k=0}^{3}\binom{3+k}{3} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = 1 + 4 + 10 + 20 = \binom{3+3+1}{3} = 35$



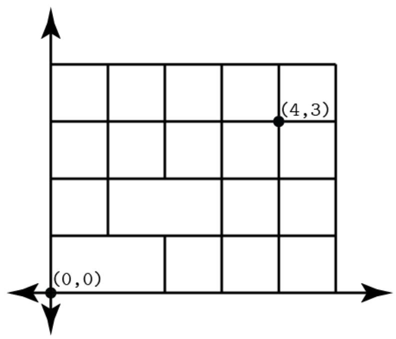
6. Problemas parte 2

1. Si una hormiga camina sobre las rayas de una cuadricula donde cada intersección entre dos rectas se denota por su coordenada cartesiana, solo puede ir hacia abajo o a la derecha y tiene que seguir las líneas ¿De cuantas formas puede llegar de (0,0) hasta (-3,2)?



2. En un juego muy particular de basquetbol, cada vez que un contrincante le lleva una ventaja de un punto al otro equipo, el otro será el que gana el siguiente punto (nota si están empatados puede ganar un punto el que sea). Si en este juego los equipos solo ganan de un punto a la vez hasta que alguno de los dos tenga 8. ¿Cuántos diferentes juego se pudieron haber jugado? Nota: una forma de jugar el juego es una lista de todos los puntos ganados en orden cronológico donde dice que equipo gano cada punto.

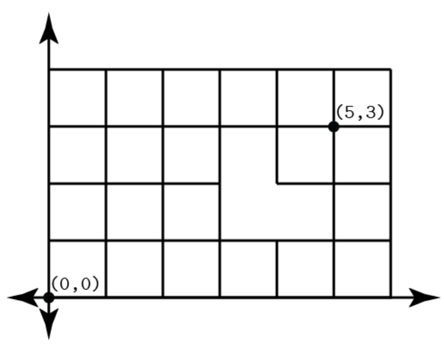
3. Pablo se encuentra en el punto (4,3), si solo puede bajar o ir a la izquierda dentro de las líneas, ¿De cuantas maneras puede llegar hasta el origen (0, 0)?



4. En un juego de futbol muy particular, sí que el equipo defensor este a un punto de ganar el equipo retador no puede meter ningún gol. Si el juego se juega hasta que alguno de los dos equipos haya metido 5 goles, ¿Cuántas diferentes formas se pudo haber jugado el juego?

Nota: una forma de jugar el juego se define igual que el problema 2.

5. Un villano se esconde en el punto (5, 3) y puso trampas en los segmentos de (3,2) a (4,2) y de (4, 1) a (4, 2). Si empiezas en el origen, ¿De cuantas maneras puedes llegar hasta el villano?



7. Vídeos

Caminos (por Uge Saurio)

https://youtu.be/FY4XeXjUEpM

Separadores (por Uge Saurio)

https://youtu.be/x4SjF2ndV18