Series, Sucesiones y recursiones

Entrenamiento #3 para el nacional
22-25 de septiembre del 2016
Por: Lulú y Argel

Resumen

En el presente material les presentaremos las series y sucesiones, es posible que en algún momento ya han tenido la oportunidad de trabajar con sucesiones de algún tipo, la idea de este material es presentarles los distintos tipos de series y sucesiones al igual que la recursión. Tendrán ejercicios para terminar de asimilar la idea y problemas que no son precisamente de sucesiones, pero que al encontrar el modo de establecer las sucesiones el problema se vuelve más fácil. Esperemos que lo disfruten. Los problemas no son tan machos pero son muchos.

1. Las sucesiones y las series

Se entiende como una sucesión a una lista de números (o de otros objetos), en la que hay un primer elemento y a partir de este los siguientes elementos están ordenados uno tras otro (no necesariamente en orden ascendente y no necesariamente en orden decreciente) . A los elementos de esta sucesión se les conoce como términos de la sucesión. Algunos ejemplos:

- $1, 2, 3, 4, 5, ...$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$
- $2, 3, 5, 7, 11, ...$
- $1, -2, 4, -8, ...$

El primer ejemplo muestra una sucesión creciente, al igual que la tercera. El segundo ejemplo es una sucesión decreciente. El último ejemplo es una sucesión que no es creciente ni decreciente.

Las sucesiones se pueden escribir en forma de lista, como en los ejemplos que se dieron anteriormente. Sin embargo, a veces se pueden expresar mediante una 'regla' o 'descripción'. Por ejemplo, las sucesiones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera:

- La sucesión $\{a_n\}$, con $a_n = n$ (empezando con $n = 1$)
- La sucesión $\{b_n\}$, con $b_n = 2^{-n}$ (empezando con $n = 0$)
- La sucesión $\{p_n\}$, con p_n igual al n-ésimo primo.
- La sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = 2^n \cdot (-1)^n$ (empezando con $n = 0$)

Esta notación tiene ventajas sobre la representación en lista cuando se desea describir una sucesión, pero es importante tener cuidado con respecto a dónde empieza la sucesión.

Una serie es la suma de los elementos de una sucesión. Por ejemplo para la sucesión $\{a_n\} = n$, se puede definir la serie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$$

que corresponde a la sumatoria de los primeros n términos de la sucesión y además es un resultado que YA CONOCEN. Pensemos en los primeros valores de esa serie:

1. Para $n = 1$, $S = 1$
2. Para $n = 2$, $S = 1 + 2 = 3$
3. Para $n = 3$, $S = 1 + 2 + 3 = 6$
4. Para $n = 4$, $S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5. Para $n = 5$, $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Y así sucesivamente. ¿Les suena?

1.1. Sucesiones aritméticas

Son sucesiones en las cuales, para obtener el siguiente término, se le suma una misma cantidad d, denominado como diferencia de la sucesión. Así que, al decir que $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética considerando como su primer término a_0, entonces el siguiente es $a_1 = a_0 + d$, posteriormente $a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d$, por lo tanto al expresar a_n en términos de d y a_0 se tiene

$$a_n = a_0 + dn$$

La serie de esa sucesión te corresponde a ti demostrarla. Consideremos que S_n denota la suma de los primeros n términos. Siendo así, la serie se calcula mediante

$$S_n = \frac{n(2a_0 + (n-1)d)}{2}$$

1.2. Sucesiones geométricas

Una sucesión geométrica es una sucesión en la que, para obtener el siguiente término, se multiplica por la misma cantidad r, que se conoce como la razón de la sucesión. Entonces, si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica estamos diciendo que si el primer término es a_0, entonces el siguiente es $a_1 = ra_0$, luego $a_2 = ra_1 = r^2a_0$ y así sucesivamente. Si se desea expresar a_n en términos de r y a_0

$$a_n = r^n a_0$$

De nuevo, considérese que S_n es la serie de los primeros n términos de la sucesión. Tendrás que demostrar, también, que:

$$S_n = a_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

1.3. Sucesiones Periódicas

Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión periódica si existe un entero positivo p tal que $a_{n+p} = a_n$ para toda n (a la p se le conoce como período de la sucesión). Cuando en una sucesión hay términos que se repiten es probable que se trate de una sucesión periódica.

1.4. Sucesiones acotadas

Una sucesión $\{a_n\}$ se encuentra acotada superiormente si existe un número M tal que sea más grande que todo término de la sucesión, es decir $a_n < M$ para toda n, Análogamente $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número m tal que sea más pequeño que todo término de la sucesión, en otras palabras, $a_n > m$ para toda n. Se dice que $\{a_n\}$ es una sucesión acotada si está acotada superiormente e inferiormente (sí, al mismo tiempo).

1.5. Sucesiones Monótonas

Si una sucesión $\{a_n\}$ es de alguno de los cuatro tipos siguientes se dice que es una sucesión monótona

- $\{a_n\}$ es no decreciente si cada que $n > m$ se tiene que $a_n \geq a_m$.
- $\{a_n\}$ es no creciente si cada $n > m$ se tiene que $a_n \leq a_m$.
- $\{a_n\}$ es estrictamente creciente si cada que $n > m$ se tiene $a_n > a_m$
- $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente si cada que $n > m$ se tiene que $a_n < a_m$

Para comprobar que una sucesión es monótona, basta ver que es monótona paso a paso. Por ejemplo, si se desea demostar que es no decreciente, basta con ver que para toda n se cumple que $a_{n+1} \geq a_n$

1.6. Sucesiones convergentes

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y (a, b) un intervalo. Diremos que $\{a_n\}$ eventualmente cae en (a, b) si existe un número entero m tal que a_n está en (a, b), si $n > m$. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ converge a L si para todo intervalo (a, b) que contiene a L, se tiene que $\{a_n\}$ eventualmente cae en (a, b). Cuando esto pase, diremos que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente con límite L, y escribiremos $\{a_n\} \to L$. Algunas propiedades útiles de las sucesiones convergentes

- Si una sucesión converge, entonces el límite al que converge es único.
- Si una sucesión es monótona y acotada, entonces es convergente.
- Si una sucesión es convergente, entonces es acotada.
- Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a A y B, respectivamente, entonces
  - $\{a_n \pm b_n\} \to A \pm B$, $\{a_n b_n\} \to AB$
  - Si $b_n \neq 0$ para toda n y $B \neq 0$, entonces $\{\frac{a_n}{b_n}\} \to \frac{A}{B}$
- (**Teorema del Sandwich**) Si tres sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ cumplen que $\{a_n\} \to L$,$\{c_n\} \to L$, y para toda n se cumple que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\{b_n\} \to L$.
- Si f es una función continua, y $\{a_n\} \to L$, entonces $\{f(a_n)\} \to f(L)$.

2. La recursión

Probablemente esto sea un tema nuevo para ustedes y quizá se estén preguntando "¿qué es eso de la recursión?" A continuación la respuesta.

2.1. La recursión

Probablemente esto sea un tema nuevo para ustedes y quizá se estén preguntando "¿qué es eso de la recursión?" A continuación la respuesta.

2.1.1. La recursión

Probablemente esto sea un tema nuevo para ustedes y quizá se estén preguntando "¿qué es eso de la recursión?" A continuación la respuesta.

3. No, ya en serio

La recursividad es lo que en la cultura general conocemos como un *inception*. En *AOPS* se le define como (cita textual [bueno, es mi traducción de la cita textual]): "un método para definir algo (usualmente una secuencia o función) en términos de valores previamente definidos". El ejemplo más claro de ello es la famosísima y ubermencionada sucesión de Fibonacci, pues cada término (excepto por los primeros dos) está definido como la suma de las dos anteriores. Ni se las mencionamos porque ya sé que la conocen.

Algunas sucesiones recursivas pueden definirse también en su *forma cerrada*. Es decir, se pueden definir sin depender de los valores anteriores. Por ejemplo, la sucesión recursiva $a_0 = 1$ y $a_n = 2a_{n-1}$ es otra manera de expresar a su forma cerrada: $a_n = 2^n$.

4. El método de las lambdas

Una ecuación recursiva tiene orden k si k es la mayor diferencia entre los subíndices. Por ejemplo, la sucesión definida por $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$ es de orden 2 porque la máxima diferencia de subíndices es $n - (n-2) = n - n + 2 = 2$. Total, ¿dónde quedaron las lambdas y qué son esas cosas? Para allá voy. No desesperéis.

Lambda es el nombre de la letra griega λ. Y el método de las lambdas consiste en tomar una ecuación recursiva (por ejemplo, la recién mencionada) y sustituir usando $x_n = \lambda^n$. En el ejemplo, eso consiste en convertir la ecuación a lo siguiente: $\lambda^n = p\lambda^{n-1} + q\lambda^{n-2}$. De aquí, suponiendo que $\lambda \neq 0$ (luego veremos por qué) se puede reducir a que $\lambda^2 = p\lambda + q$, que se vuelve la siguiente cuadrática: $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$. Por cierto, una ecuación de esta forma se llama **ecuación característica**. Peso ya es resolvible, ¿no? Claro, λ podría tener dos valores; llamémosles λ_1 y λ_2.

¿Y ahora qué? El método de las lambdas nos dice que, si las raíces son distintas, entonces $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$. ¿Y qué son esas a y b? La respuesta la encontrarás en tu corazón (y en los valores iniciales de la sucesión, sustituyendo para términos que conoces). Claro, si llega a suceder que las raíces son iguales, eso es $x_n = (a+b)\lambda^n$. Como es tradición, veamos un ejemplo para que quede claro.

Una secuencia x_n tiene los términos $x_0 = 2$ y $x_1 = 7$, y está definida recursivamente mediante $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Encuentra una expresión cerrada para x_n. Primero, es evidente que la ecuación característica es $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, la cual tiene raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$; por ello, la solución general es de la forma $x_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$. Con $n = 0$ se tiene $x_0 = 2 = a \cdot 3^0 + b \cdot 4^0 = a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$. Con $n = 1$ se tiene $x_1 = 7 = a \cdot 3^1 + b \cdot 4^1 = 3a + 4b$. Al resolver ese sistema, queda claro que $a = b = 1$, ¿no? De aquí que $x_n = 3^n + 4^n$.

5. Ejercicios

1. Una sucesión aritmética tiene $a_0 = 1$ y diferencia 7. ¿Cuánto vale a_{289}?
2. Una sucesión aritmética cumple $a_{10} = 100$ y $a_{20} = 120$. ¿Cuánto vale a_{30}?
3. (Propiedades útiles) Muestra que si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética de diferencia $d \neq 0$ entonces:
   a) $\frac{a_i + a_{i+2}}{2} = a_{i+1}$
   b) $a_{i-1} \cdot a_{i+1} + d^2 = a_i^2$
   c) $\frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right)$
4. Se tienen 21 números enteros distintos entre 1 y 100. Muestra que hay dos con diferencia entre 1 y 4.
5. La siguiente era una sucesión geométrica, pero se borraron algunos números:

   $$27, ?, ?, 8, ?, ?, ?, x.$$

   ¿Cuál es el valor de x?

6. Demuestra que en una sucesión geométrica sucede que $a_i \cdot a_{i+2} = a_{i+1}^2$.
7. Encuentra todas las posibles sucesiones que son a la vez aritméticas y geométricas.
8. Se escribe la sucesión de números $2, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 0, \ldots$ ¿Cuál es el término en la posición 2012?
9. ¿Cuándo una sucesión geométrica es periódica? ¿Cuándo una sucesión aritmética es periódica?
10. Muestra que las sucesiones aritméticas con diferencia $d > 0$ están acotadas inferiormente, pero no superiormente. Del mismo modo, muestra que si $d < 0$, entonces están acotadas superiormente, pero no inferiormente. ¿Qué sucede con las sucesiones geométricas?
11. Muestra que si $\{a_n\}$ es una sucesión periódica, entonces está acotada.
12. ¿Cuál es el valor máximo de $\frac{10^n}{n!}$?
13. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Encuentra el valor a_{2012}
14. Encuentra una fórmula cerrada para ls sucesión anterior.
15. La sucesión de números $t_1, t_2, t_3, \ldots$ está definida por $t_1 = 2$ y $t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}$. ¿Cuánto vale t_{2015}?
16. Considérese la sucesión recursiva compleja $z_{n+1} = iz_n$. Demuestra que la función es periódica: ¿de qué período?

6. Agregados culturales

1. Si quieren ver otra explicación acerca de recursión, además de la que ya se encuentra en la lista, siempre pueden escribir recursión en google y darle click al primer texto azul que les aparezca.
2. Pese a lo que uno se suele imaginar, Acapulco sí es la ciudad más grande y poblada de Guerrero, pero no es la capital; ésta es, en realidad, la ciudad de Chilpancingo.
3. Quesanic recursivo

7. Problemas

1. ¿Es posible encontrar una sucesión aritmética infinita en la cual todos los números son cuadrados perfectos distintos?
2. Consideremos la secuencia de los números naturales, y agrupemos los términos de la siguiente manera:

   $$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), \ldots$$

   ¿Cuánto vale la suma de los números del n- ésimo grupo?
3. Demuestra que las potencias de 2 son los únicos enteros positivos que no pueden ser escritos como la suma de dos o más enteros consecutivos.
4. Se tiene una sucesión aritmética $\{a_n\}$ con diferencia positiva. Se sabe que se puede elegir uno de los números a_{11}, a_{12}, a_{13} y uno de los números a_{21}, a_{22}, a_{23} de modo que la diferencia entre estos dos números es múltiplo de 7. Encuentra el mínimo valor que puede tener la diferencia de la sucesión.
5. Una sucesión aritmética $\{a_n\}$ de enteros tiene diferencia d. Se sabe además que:

- $1 \leq a_0 \leq 5$
- $86 \leq a_{20} \leq 120$
- a_{20} es múltiplo de 7

Encuentra el valor de a_{10}

6. Un polinomio p cumple que $p(0)$, $p(1)$, $p(2), \ldots$, están en progresión aritmética. Muestra que el grado de p es 1 ó menos

7. Calcula la siguiente suma
$$a = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + 10 \cdot 4^9.$$

8. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Encuentra una fórmula para el término general a_n.

9. Muestra que si $\{a_n\}$ es un sucesión aritmética, entonces $\{2^{a_n}\}$ es un sucesión geométrica. ¿De qué razón? ¿Cómo puedes, a partir de una sucesión geométrica, obtener una sucesión aritmética?

10. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones geométricas, muestra que $\{a_n b_n\}$ también es una sucesión geométrica. ¿De qué razón?

11. Considera tres enteros positivos consecutivos. Deja el primero sin modificar. Súmale 10 al segundo. Súmale un primo p al tercero. Si quieres que los tres números así obtenidos estén progresión geométrica, ¿qué primo p tuviste que elegir?

12. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = 3a_n + 7$. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$.

13. Supongamos que $a_1 = 2$ y que $a_{k+1} = 3a_k + 1$. Encuentra una fórmula general para $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

14. Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en progresión geométrica. Encuentra una fórmula para $a_1 a_2 \cdots a_n$ en términos de $S = a_1 + \ldots + a_n$ y $T = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$.

15. La sucesión $\{x_n\}$ es aritmética. La sucesión $\{y_n\}$ es geométrica. La sucesión $\{z_n\}$ cumple que $z_n = x_n + y_n$. Si $z_1 = 1$, $z_2 = 8$, $z_3 = 10$ y $z_4 = 32$, ¿cuál es el valor de z_5?

16. Sea p un polinomio. ¿Es posible que $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ... formen una sucesión geométrica?¿Cuándo?

17. Una mosca está en el origen (0,0) y viaja sobre el plano 1cm hacia el este, luego $\frac{1}{2}$cm hasta el norte, luego $\frac{1}{4}$cm hace el oeste, luego $\frac{1}{8}$ hacia el sur, luego $\frac{1}{16}$cm hacia el este, etcétera. Si la mosca hiciera esto infinitamente, ¿dónde terminaría?

18. Se escribe la sucesión de Fibonacci, pero en cada paso los números se reducen módulo 3. Muestra que la sucesión que se obtiene es periódica.

19. El número x se escribe en expansión decimal como $x = 0.a_0 a_1 a_2 a_2 a_3 \ldots$ Muestra que x es racional si y sólo si $\{a_n\}$ es periódica.

20. Muestra que si $\{a_n\}$ es periódica de periodo p y $\{b_n\}$ es periódica de periodo q, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ es periódica. ¿De qué periodo?

21. Se toma un número $x = 0{,}1a_2a_3a_4\ldots$, donde $a_n = 0$ si n es primo y $a_n = 1$ si n es compuesto. Muestra que x es un número irracional.

22. Sea f una función tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que
$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x)$$
Muestra que es periódica.

23. ¿Es posible reemplazar $\sqrt{2}$ por algún real t, de manera que la función tenga cualquier período deseado?

24. Encuentra una fórmula para $1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots$

25. Sea $\{a_n\}$ la sucesión con $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. ¿Es $\{a_n\}$ una sucesión acotada?

26. Muestra que toda sucesión aritmética es monótona. ¿Qué sucesiones geométricas son monótonas?

27. Una secuencia a_n está definida por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Muestra que:

    a) La sucesión monotónicamente creciente
    b) La sucesión está acotada superiormente por 3
    c) Encuentra el límite de la función.

28. Muestra que si $\{a_n\}$ es no decreciente, entonces $\{-a_n\}$ es no creciente. ¿Se puede garantizar que $\{-a_n\}$ sea decreciente?

29. Muestra que la sucesión $\{a_n\}$, con $a_n = \frac{n}{n+1}$, es una sucesión estrictamente creciente.

30. $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1,\ (n \geq 1)$. Prueba que 4 no divide a a_{1964}.

31. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Muestra que $\{\frac{a_n}{1+a_n}\}$ está acotada y es creciente.

32. A partir de la sucesión $\{a_n\}$ se define la sucesión $\{b_n\}$ de modo que $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Muestra que la sucesión b_n es creciente si y sólo si todos los números $\{a_n\}$ son positivos.

33. $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2},\ n \geq 0$. Encuentra $\lim_{n\to\infty} a_n$.

34. **(Principio del Descenso Infinito)** Muestra que no existen sucesiones infinitas estrictamente decrecientes de números naturales.

35. Aplicar un desliz a un entero $n \geq 5$ es transformarlo en $\frac{n+p^2}{p}$ con p primo que divide a n. Muestra que tras aplicar deslices a un entero, eventualmente se llega a 5.

36. $a > 0,\ a_0 = \sqrt{a},\ a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Encuentra $\lim_{n\to\infty} a_n$.

37. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos es súper-creciente si para toda n se tiene que $a_{n+1} > a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si $\{a_n\}$ es súper-creciente, ¿cuántas sumas distintas se pueden hacer con los términos $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

38. Muestra que si una sucesión de enteros positivos es no creciente, entonces a partir de algún momento es constante.

39. ¿Cuál es el siguiente término en la sucesión $1, 11, 21, 1211, 111221, \ldots$?

40. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 1,\ a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = na_n + (n-1)a_{n-1} + \cdots + a_1 + 1$. Encuentra una fórmula para a_n.

41. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$ si $a_n = 3a_{n-2}$ para $n \geq 2$

42. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$ si $a_n = \frac{n-1}{2n}a_{n-1}$ para $n \geq 2$.

43. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$ en términos de a_0 si $a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{9}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+2b_n}{9}$ y $a_0 + b_0 = 1$.

44. Encuentra una fórmula cerrada para la sucesión de Fibonacci.

45. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ forman una sucesión de números de modo que $a_1 = 1$, y para $n > 1$ se cumple que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$. Encuentra a_{2010}.

46. ¿De cuántas formas se puede llenar un tablero de 15×2 con fichas de 2×1? ¿Y de $n \times 2$?

47. ¿Cuántos números de 10 dígitos hay, tal que cada uno de los dígitos es 7 ú 8 y que además no tienen dos dígitos 7 juntos?

48. Encuentra otra solución para el ejercicio 14.

49. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1 \end{aligned}$$

50. Encuentre una fórmula recursiva para la n-ésima derivada de

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^k}}$$

51. Considérese la sucesión recursiva compleja $z_{n+1} = iz_n$. Si $z_0 = 3 + 4i$, encuentra z_{2015}, su ángulo y su magnitud.

52. Considera un par de sucesiones periódicas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, no necesariamente ambas con el mismo período. Se construye la sucesión compleja $c_n = \{a_n + ib_n\}$. ¿Es periódica?, ¿de qué período?

53. Sean $f(x) = (\sqrt{x} - 3)^2$ y $g(x) = (\sqrt{x} - 33)^2$. Encuentra el valor de $f^{33}(10000)$ y de $g^{33}(10000)$. (Nota: $f^n(x)$ significa evaluar sucesivamente la función f n veces, donde la primera evaluación se hace en x.)

54. Encuentra el límite de las siguientes sucesiones: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$.

55. Un cartero lleva correo a diecinueve casas alinehadas en la costa de Acapulco. El cartero notó que cualquier par de casas consecutivas nunca reciben correo el mismo día, pero nunca hay más de tres casas consecutivas que en el mismo día se quedan sin correo. ¿De cuántas maneras puede suceder esto?

56. Se llama *espacioso* a un conjunto de enteros si, de cualquier conjunto de tres enteros consecutivos, sólo contiene a uno de ellos. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, incluyendo el conjunto vacío, son espaciosos?

57. Considera secuencias que consistan únicamente de A's y B's y que tienen la propiedad que cualquier cadena de A's es de longitud par, y cualquier cadena de B's tiene longitud impar. Algunos ejemplos de secuencias válidas son AA, B y $AABAAAABBB$, mientras que $BBAB$ no es una secuencia válida. ¿Cuántas secuencias válidas hay de longitud 14?

58. Una colección de m cubos consiste de un cubo de lado k para cada entero k tal que $1 \leq k \leq m$. Una torre se construye usando los m cubos según las siguientes reglas:

    - Cualquier cubo puede ser la base de la torre.
    - Cualquier cubo puede ser a lo más 2 unidades mayor (en cuestión de las medidas de sus lados) que el que está inmediatamente debajo.

    ¿Cuántas torres distintas que pueden ser construidas?