34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Elías Loyola Campos

Dios hizo los naturales; el resto es obra del hombre
LEOPOLD KRONECKER (1823-1891)

1. Antecedentes

En la historia de la humanidad, para escribir, comunicar o efectuar cálculos, se han inventado diversos sistemas de numeración. Ese conocimiento ha llegado a nosotros en soportes de huesos con muescas, tablillas de barro con incisiones que se hicieron antes de cocerse, papiros, pergaminos, libros e incluso cuerdas con nudos. Un sistema de numeración consta de un conjunto de símbolos y de una regla para escribir los numerales (un numeral es una imagen que representa a un número); también, para comunicarlos oralmente, es necesaria una regla para nombrarlos. Por lo general, a los numerales les llamamos números, pero en realidad un número es un concepto abstracto que representa una cantidad o una magnitud.

Para operar eficientemente con los números, conviene manejarlos con sistemas posicionales. Aquí nos ocuparemos de esto. En un sistema posicional se tiene un número b llamado base, un conjunto de b símbolos (que llamaremos dígitos) y unas reglas para escribirlos.

El primer sistema posicional del que se tiene registro es el babilónico, en el siglo 18 *a.C.*, que era de base 60 y perdura aún en nuestro uso cotidiano cuando a la hora la partimos en 60 minutos y a éstos en 60 segundos, lo mismo podemos decir de las medidas usuales para los ángulos. (¡Más de 40 siglos así!). Quizá la preferencia de la base 60 se debía a que éste tiene 12 divisores.

Otro sistema usado fue el maya de base 20, se cree que se debía a la facilidad de contar con los dedos de las manos y pies (andaban descalzos). Sin embargo, el que ganó la popularidad fue el sistema decimal (base 10). No obstante, en la tecnología actual, el sistema binario (base 2) es el que se usa.

Durante el desarrollo del texto iremos poniendo problemas, algunas soluciones vienen al final de este documento.

2. El sistema decimal

Comencemos con el sistema que conocemos más: el sistema decimal. La base *b* es 10 y los dígitos son {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Para construcción de un numeral cualquiera empleamos los dígitos, unos junto a otros y ellos adquieren su valor numérico dependiendo la posición que ocupen (por ello el nombre de sistema posicional). El orden de la magnitud de los numerales inicia con las unidades que representan al número que señala el dígito; continúa con las decenas que representan 10 veces el número que señala el dígito; siguen las centenas que representan 100 veces el número que señala el dígito, etc. El orden de magnitud de los dígitos va de derecha a izquierda, seguramente el orden se debe a que estos números los aprendimos de los árabes, quienes escriben en esa dirección.

Así, un numeral representa al número que es la suma de los valores relativos de los dígitos. Por ejemplo 26’031’961 representa 1 unidad, 6 decenas, 9 centenas, 1 unidad de millar, 3 decenas de millar, 0 centenas de millar, 6 unidades de millón y 2 decenas de millón. (Los apóstrofos no son necesarios, pero sí muy convenientes para ubicar visualmente los órdenes de magnitud; algunas veces se usan comas para dichas separaciones, 26,031,961; o puntos en otros países, 26.031.961; incluso también los medios espacios, o espacios completos, son empleados 26 031 961 para ello.) Lo anterior significa:

$1 \times 10^0 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^3 + 3 \times 10^4 + 0 \times 10^5 + 6 \times 10^6 + 2 \times 10^7$

Lo cual es equivalente a 1 + 60 + 900 + 1000 + 30000 + 0 +6000000 + 20000000. Aquí se ve claramente el valor que tiene el primer 1 del 1 siguiente, lo mismo podemos decir del 6, ya que, si bien se trata del mismo dígito, representan valores diferentes en el numeral.

Cuando escribimos 3.1416, empleamos el *punto decimal* (en otros países escriben la “coma decimal”) para indicar las fracciones, las cuales, a partir del punto son décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos, etc. En este caso nos referimos a fracciones *decimales* de la unidad: 1/10, 1/100, 1/1’000, 1/10’000, etc.

Así, $3.1416 = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$.

Cada posición equivale a 10 veces la posición de la derecha.

Los algoritmos para la suma y la resta de números requieren que acomodemos las cifras de manera ordenada, a partir del punto decimal para que sumemos o restemos los valores del mismo orden (En el álgebra es el equivalente a la suma de términos semejantes):

$$\begin{array}{r} 3.1416 \\ +\ 23.56 \\ \hline 26.7016 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 03.1416 \\ +\ 23.5600 \\ \hline 26.7016 \end{array}$$

Los lugares que están vacantes se suponen ceros, pero no es necesario colocarlos. Cuando la suma de dos cantidades del mismo orden excede ese orden, habrá de considerarse el "acarreo" (decimos "que llevamos") para el orden de magnitud siguiente.

Lo mismo ocurre con la multiplicación: $(3x^2 + 5x + 2 + 8x^{-1}) \times (x + 2 + x^{-1})$ tenemos que acomodarlos en potencias descendentes de la variable y se irán acomodando fácilmente los términos del producto.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 2 + 8x^{-1} \\ \times \qquad x + 2 + x^{-1} \\ \hline 3x + 5 + 2x^{-1} + 8x^{-2} \\ 6x^2 + 10x + 4 + 16x^{-1} \quad \\ 3x^3 + 5x^2 + 2x + 8 \qquad\qquad \\ \hline 3x^3 + 11x^2 + 15x + 17 + 18x^{-1} + 8x^{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(10^2) + 5(10^1) + 2(10^0) + 8(10^{-1}) \\ \times \qquad (10^1) + 2(10^0) + (10^{-1}) \\ \hline 3(10^1) + 5(10^0) + 2(10^{-1}) + 8(10^{-2}) \\ 6(10^2) + 10(10^1) + 4(10^0) + 16(10^{-1}) \quad \\ 3(10^3) + 5(10^2) + 2(10^1) + 8(10^0) \qquad\qquad \\ \hline 3(10^3) + 11(10^2) + 15(10^1) + 17(10^0) + 18(10^{-1}) + 8(10^{-2}) \end{array}$$

Imagina ahora que x es 10, la base del sistema decimal, entonces los polinomios son: $3x^2 + 5x + 2 + 8x^{-1} = 352.8$ y $x + 2 + x^{-1} = 12.1$, luego, el producto es $3(10^3) + 11(10^2) + 15(10^1) + 17(10^0) + 18(10^{-1}) + 8(10^{-2})$. Sin embargo, al querer acomodarlos como un numeral, hay problemas pues, si bien $8(10^{-2})$ nos indica que se trata de **8** centésimas, pues el 8 sí es un dígito, pero 11, 15, 17 y 18 no son dígitos. Por ejemplo, $18(10^{-1})$ es $[1(10^1) + 8(10^0)]\,(10^{-1}) = 1(10^0) + 8(10^{-1})$, lo que nos indica que en el lugar de las décimas habremos de colocar **8**, pero en el lugar de las unidades, que está el 17, habrá una unidad más y será 17 + 1 = 18 que sabemos que no es dígito, por tanto, en las unidades también colocaremos **8**; pero acarrearemos una unidad hacia las decenas y en éstas no será 15 sino 15 + 1 = 16 y en dicho lugar colocamos **6** pero acarreamos una unidad hacia las centenas, la cual quedará como 12. Por ello en el lugar de las centenas escribimos **2** y acarreamos una unidad hacia los millares, los cuales, a su vez serán 3 + 1 = **4**. Entonces, el resultado final es 4268.88. Esa es la razón del algoritmo de la multiplicación, al cual en cada línea corremos un lugar para que los dígitos queden acomodados en el orden correcto. Compáralo con lo que se hace regularmente (particularmente el renglón donde multiplicas por el segundo dígito).

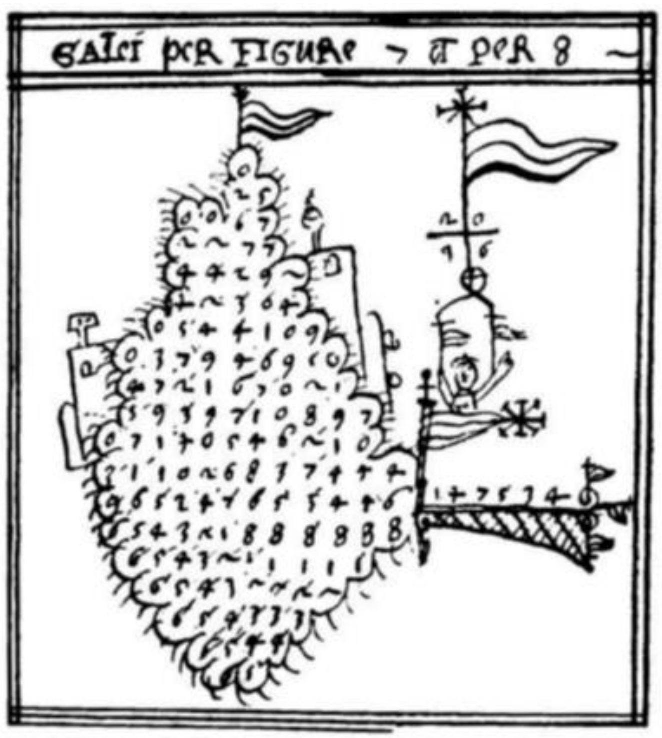
		3	5	2	. 8
		×	1	2	. 1
		3	5	2	8
	6	10	4	16	
3	5	2	8		
3	11	15	17	. 18	8

		3	5	2	. 8
		×	1	2	. 1
		3	5	2	8
	7	0	5	6	
3	5	2	8		
4	2	6	8	. 8	8

El desarrollo del álgebra y su notación permitió obtener algoritmos más eficientes. Por ejemplo, en el Renacimiento era muy engorroso efectuar el cálculo de la división, sólo quienes sabían mucho de matemáticas podían realizarlo.

En cambio, el algoritmo con el que aprendimos es relativamente fácil porque está basado en las potencias de la base numérica, 10 en nuestro caso, pero es el mismo para cualquier base y puede enseñarse a los niños de Primaria.

Pero para hacer bien una división se deben saber las tablas de multiplicar.



División por el método de la galera, del siglo XVI, procedente de un manuscrito no publicado de un monje veneciano. El título de la obra es: «Opus Arithmetica D. Honorati veneti monachj coenobij S. Lauretig», Biblioteca de Mr. Plimpton.

3. El sistema binario

Es el sistema más simple de todos pues sólo requiere de dos dígitos: 0 y 1. Cada posición vale 2 veces la posición de la derecha. Aprenderse las tablas de suma o producto no requiere esfuerzo de memorización.

Tabla para sumar en base dos

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 10$

Tabla para multiplicar en base dos

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

En contraparte a la sencillez de las tablas está la cantidad de caracteres que se requieren para escribir los numerales:

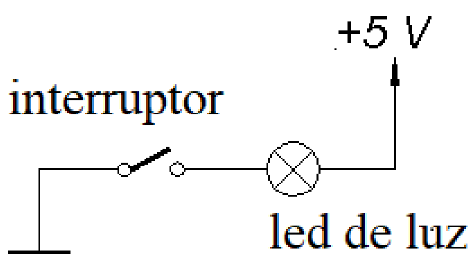
Numerales en base diez	Numerales en base dos
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

De la misma manera que antes, un número escrito en base dos se puede representar como la suma de potencias de 2. Así 101101_2 equivale a 45, en base 10 pues

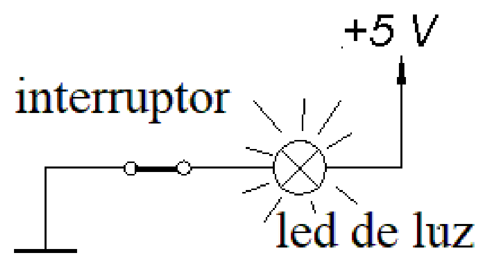
$$101101_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 1 + 0 + 4 + 8 + 0 + 32 = 45_{10}$$

Se acostumbra colocar en un subíndice a la base de la que se refiere y, por lo general, cuando se trata de la base diez no se acostumbra tal subíndice, pero puedes ponérselo.

El hecho de que la base 2 sólo requiere de 2 dígitos (0 y 1) y que es equivalente a “ No pasa corriente” o “Sí pasa corriente” lo hace preferido en los circuitos eléctricos y de cómputo para crear las llamadas compuertas lógicas en los sistemas de control. Si el interruptor está abierto, no pasa corriente y si está cerrado sí pasa corriente. En la lógica binaria, que sólo tiene dos valores [Falso (No) o Verdadero (Sí)], al “0” se le asocia el “No” y al “1” se le asocia el “Sí”.



No pasa corriente



Sí pasa corriente

El sistema binario también es muy usado en juegos de adivinación. El siguiente juego lo conocí en mi niñez como “Las tablas del Rey Salomón”, no sé cómo lo llamen ahora, pero es muy difundido. Consta de varias cartas, tantas como cifras se requieran para escribir un número dado en sistema binario. Por ejemplo, para “adivinar” un número del 1 al 15 requiere cuatro cartas que son las siguientes:

1	3	5
7	9	11
13	15	

2	3	6
7	10	11
14	15	

4	5	6
7	12	13
14	15	

8	9	10
11	12	13
14	15	

Cartas para “adivinar” un número del 1 al 15

El “mago” le dice a una persona del público: “Piensa un número del 1 al 15 y toma las cartas en que está”. El espectador escoge las cartas donde está el número que pensó y se las da al “mago”; éste las mira, y mentalmente efectúa la suma de los primeros números de cada carta, para dar la suma obtenida, la cual coincide con el número pensado. El espectador asiente y vienen los aplausos.

La razón del porqué funciona el truco es muy sencilla. Los números con los que inician las cartas, al escribirse en base 2, inician con 1 y las cifras restantes son 0, pues son potencias de 2. Un número cualquiera, al escribirse en base 2 tendrá un 1 si entre los sumandos está la potencia correspondiente de 2, en caso contrario tendrá un 0; por ello, sabemos si está contenido en la carta o no lo está.

4. Problemas en base dos

1. Si con este juego quiero "adivinar" los números del 1 al 16, requiero aumentar otra carta, pero dicha carta sólo tendría escrito "16", lo mismo ocurriría si quiero "adivinar" números del 1 al 18 y ésta quinta carta sólo tendría los números 16, 17 y 18. ¿Qué otras cartas deben incluirlos?

2. Según el problema anterior, Para "adivinar" los números del 1 al 18 requiero cinco cartas con 9, 9, 8, 8 y 3 números, de la primera a la quinta, respectivamente. ¿Cuántas cartas necesito si quiero adivinar un número del 1 al 100? ¿Cuántas y cuáles tendrán la misma cantidad de numerales anotados?

3. A mi sobrino Jorge se le perdió esta carta de "Las tablas del Rey Salomón", ¿cuántas cartas tiene su juego y hasta qué número puede adivinar?

2	3
6	7

4. En este juego de "Las tablas del Rey Salomón", para adivinar un número entero cualquiera del 1 al 2^n-1, ¿cuántas cartas requieres? ¿Cuántos números tendrá escritos cada carta? Explica tu respuesta.

5. Se tienen n cartas, numeradas del 1 al n.

En la carta número 1 se escriben los números 1, 3, 5, 7, …, n_1.

En la carta número 2 se escriben los números 2, 3, 6, 7, 10, 11,…, n_2.

En la carta número 3 se escriben los números 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17,…, n_3.

Se continúa de la misma manera. Así, en la carta número k se escriben los números k, $k+1$, $k+2$, $k+3$, …, $2k-1$, $3k$, $3k+1$, $3k+2$, $3k+4$,…, $4k-1$, $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+4$,…, $6k-1$, $7k$, $7k+1$, $7k+2$, $7k+4$,…, $8k-1$,…, n_k. (En un examen no van los colores, aquí te los pusimos para que te des cuenta, más fácil, de la manera en la que van escribiéndose.)

En la carta n, se escriben los números n, $n+1$, $n+2$, $n+3$,…, $2n-1$. Donde todos los n_i son menores que $2n$ para todo i natural (se simboliza así: $n_i < 2n$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$).

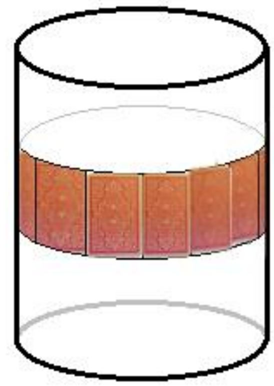
Es decir, se escriben k números consecutivos en la carta k, empezando por dicho número; luego, se omiten los k números consecutivos siguientes y se vuelven a escribir los siguientes k números consecutivamente empezando por $3k$; luego se omiten los k números consecutivos siguientes y se vuelven a escribir los siguientes k números consecutivamente empezando por $5k$. Se continúa de la misma forma hasta llegar al número más cercano, por abajo, a $2n$.

Demuestra que para algún número k, existe un subconjunto de estas cartas que sirve para el juego de “Las tablas del Rey Salomón”. ¿Cuál es el valor mayor de k?

6. Se tienen 20 cartas de un naipe colocadas en fila, con la figura colocada hacia abajo. Un movimiento consiste en elegir una carta que esté con la figura boca abajo y se voltea con la figura hacia arriba, pero también habrá de dársele vuelta a la carta que esté a la derecha. Demostrar que no importa que carta se elija al principio, si se continúa con una secuencia de movimientos de este tipo, dicha secuencia tendrá necesariamente un final.

Si ya viste la respuesta del ejercicio 6, y por si no se te había ocurrido, van otros parecidos, que debieron ocurrírsete, ya que eres un concursante de olimpiada, pues éstos no se quedan conformes sólo cuando resolvieron un problema, siempre le buscan “tres pies al gato”, además de la generalización.

7. Se tienen 20 cartas de un naipe colocadas en fila, alrededor de un cilindro con la figura de la carta colocada hacia la superficie del cilindro. Un movimiento consiste en elegir una carta que esté con la figura hacia la superficie del cilindro y se voltea con la figura hacia afuera para que quede visible, pero también habrá de dársele vuelta a la carta que esté a la derecha. Demostrar que, si se continúa con una secuencia de movimientos de este tipo, dicha secuencia tendrá necesariamente un final. ¿Será cierto?



8. Si en el problema 6, hay n cartas al inicio, con $n > 1$, en lugar de 20, la demostración es idéntica. Sin embargo, ¿será posible encontrar una secuencia que permita dejar todas las cartas boca arriba?

9. Si en el problema 7, hay n cartas al inicio, en lugar de 20, ¿será posible encontrar una secuencia que permita dejar todas las cartas boca arriba? (¿Ya te fijaste que aquí no puse $n > 1$?)

Estoy de acuerdo que los problemas 7, 8 y 9 no fueron de sistema binario, sin embargo, los derivamos del 6 y nos permitieron observar otros métodos útiles en la resolución de problemas.

Ya vimos cómo pasar de base 2 a base 10. Hacer lo inverso tampoco tiene dificultad. Primero entendamos el asunto con base 10. Si tengo un conjunto de objetos, digamos *trescientas cincuenta y dos manzanas*, y quiero escribir el numeral en base diez (sí, ya sé que lo escribí con palabras y esas me dicen cómo escribir el numeral), para ver las unidades separo en grupos de decenas y quedan dos manzanas que no pudieron agruparse de tal forma, por tanto, el numeral habrá de tener 2 unidades; para ver cuántas decenas le asigno, separo a éstas en grupos de diez decenas (es decir serán grupos de centenas), y veo que me sobrarán 5 decenas que no pude agrupar, entonces, el numeral deberá tener un 5 en el lugar de las decenas; si quisiera continuar haciendo decenas de los grupos que tengo, ya no puedo, pues sólo tengo 3 centenas, así que el 3 será asignado a las centenas y tendré el numeral 352 que me representa al número de manzanas en base 10.

Ahora haré el mismo procedimiento para escribir a este número en base 2. Separamos en parejas (352/2 = 176) y resultan 176 parejas exactas, es decir no quedan manzanas sin agrupar, por tanto, hay **0** unidades en el numeral.

Ahora hago parejas de parejas (o pares de pares, es decir grupos de 4 manzanas) para ello divido entre 2 (176/2 = 88) y resultan 88 parejas de parejas exactas, es decir no quedan parejas de manzanas sin agrupar, por tanto, también hay **0** pares en el numeral.

Ahora apareo los grupos de pares de pares (es decir, haré grupos de 8 manzanas), para ello vuelvo a dividir entre 2 y obtendré los pares de pares de pares (88/2 = 44), son 44 exactamente y no me queda ningún grupo de pares de pares sin agrupar, es decir, en el lugar de pares de pares (2^2) habrá un dígito **0**.

Continuamos ahora con la potencia 2^3; volvemos a dividir entre 2 (44/2 = 22), al quedar exacto, el cuarto dígito también será **0**.

El lugar que sigue (2^4) se calcula volviendo a dividir entre la base, 2 en este caso, (22/2 = 11) que también queda exacto, es decir, el dígito del quinto lugar será **0**.

Para (2^5) se repite la operación de división (11/2 = 5 enteros y sobra 1), por tanto, en el lugar sexto irá un **1**.

En el séptimo lugar, el de 2^6, se divide 5/2= 2 enteros y sobra 1, entonces será dígito **1**.

Para el octavo lugar, el de la potencia 2^7, volvemos a dividir 2/2 = 1 y no sobra nada, el dígito es **0** en el octavo lugar.

Para el siguiente dígito, el de 2^8, hacemos la división 1/2 = 0 y sobra 1, por tanto, en el noveno lugar irá un 1.

Como ya no tenemos cantidad que dividir, hemos concluido el proceso y podemos escribir el numeral, en base 2, que representa a la cantidad de manzanas es el que formamos colocando los dígitos en los lugares señalados antes: 101100000_2 y en base 10 es $0 \times 2^0 + 0\times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0\times 2^3 +0 \times 2^4 + 1\times 2^5 + 1 \times 2^6 + 0\times 2^7 + 1 \times 2^8 = 352_{10}$.

5. Datos de vital importancia

Ya se la saben, ¿quieres descansar unos segundos? ¿Necesitas despejar tu mente? ¿Te gustan los datos curiosos?

1. La media armónica de las frecuencias más alta y más baja de una octava (el do del inicio y el del final) se aproxima es la frecuencia de la nota fa. https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf

2. El primer registro de ocelote en el estado de Aguascalientes fue en 2010. Sin embargo, las dos fotografías que se obtuvieron mediante fototrampeo corresponden a dos puntos en el Estado de México (19º 05' 44.16'' N, 99º 09' 50.19''W y 19º 05' 15.26'' N, 99º 09' 48.74''W) a 503 km de distancia de la Comunidad de Monte Grande, en la Sierra Fría de Aguascalientes, donde se afirma fueron obtenidas.
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0065-17372013000300018&lng=es&tlng=es

6. Otras bases

De la misma manera en la que lo hicimos para base 2, se hace para cualquier otra base entera mayor que 2. Por ejemplo, ¿qué número en base 10 representa el numeral 31_4?

Como 31_4 está en base 4, habrá que expandirlo en potencias de 4:

$$1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 = 1 + 12 = 13_{10}.$$

Para los numerales de bases mayores a diez suelen utilizarse como dígitos a A, B, C, D, E, F, … etc. Así en la base 16, o hexadecimal, A = 10, B = 11, C = 13, D = 14 y F = 15.

¿Cómo se escribe el numeral hexadecimal que corresponde a 1000_{10}?

Procederemos de la misma forma que lo hicimos con la base 2, dividiremos consecutivamente entre 16, que es la base y escribiremos los residuos respectivos, de derecha a izquierda, iniciando en el lugar de las unidades.

$$\begin{array}{r} 62 \\ 16\overline{)1000} \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 16\overline{)62} \\ 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ 16\overline{)3} \\ 3 \end{array}$$

Así, $1000_{10} = 3D8_{16}$.

10. Transformar 1000_{10} a base 2, base 4 y base 8.

11. ¿Qué regularidad observas en lo siguiente?:

a) $1111101000_2 = 33220_4$
b) $1111101000_2 = 1750_8$
c) $1111101000_2 = 3D8_{16}$
d) $33220_4 = 3D8_{16}$

12. Todos los numerales de este problema están en distintas bases. ¿Qué numeral falta en esta sucesión?: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, __, 10000.[1]

7. Numerales de fraccionarios en otras bases

Las fracciones que están como cocientes de enteros se pueden escribir en otra base simplemente como cociente de los números enteros transcritos en la otra base.

¿Quién no ha ido a la tlapalería a comprar clavos? El sistema inglés de medidas, el cual se espera que cambie completamente al métrico decimal cuando fenezcan las personas de esta generación, o cuando más la siguiente, nos habla de pulgadas, medias pulgadas, cuartos de pulgada, octavos de pulgada, dieciseisavos de pulgada, etc., porque es la manera más simple de dividir algo si se carece de cultura aritmética operacional como pasaba hace siglos. Pero ello es un sistema de base dos que considera las fracciones.

Lo mismo puede hacerse en otras bases. Por ejemplo, si tenemos la fracción “un medio” en base 10, $1_{10}/2_{10}$, y la queremos poner en base 3, bastara colocar, numerador y denominador en dicha base y obtener $1_3/2_3$. ¡Uh, qué chiste, quedó igual! Sí, porque los dígitos son menores que 3 pero si recordamos que en base 10, “un medio” también es equivalente a $3_{10}/6_{10}$ y transformamos numerador y denominador a la base 3 obtendremos que $10_3/20_3$. Dirás que eso también es lo mismo que los numerales en base 10.

[1] Martin Gardner. Miscelánea matemática. Biblioteca Científica Salvat, núm. 43, Barcelona, 1986. Puedes bajarlo en https://mega.nz/file/fmADyKZZ#znQaPDuKN7w7ekHiYk_SGxhVQNi34BfkOGHSEjZxegk

Cabe reflexionar qué hicimos: $1_{10}/2_{10} = 1_3/2_3$. A la primera fracción la estamos multiplicando por $(10_{10}/10_{10})$ y a la segunda por $(10_3/10_3)$ *que no es lo mismo, pero es igual*[2] porque a las dos las multiplicamos por la unidad, pero $10_3/10_3 = 3_{10}/3_{10}$.

¡Ah, pero también "un medio" es equivalente a $7_{10}/14_{10}$! y en base 3 se debe escribir como $21_3/112_3$ y aquí ya no sale lo mismo que si estuviese escrito en base 10.

¿Y si los números fraccionarios están escritos como potencias de la base? Por ejemplo, sabemos que $3.1416_{10} = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$. Es decir, tenemos $3.1416_{10} = 3 \times (1/1) + 1 \times (1/10) + 4 \times (1/100) + 1 \times (1/1000) + 6 \times (1/10000)$ por eso decimos 3 enteros más 1 décimo, más 4 centésimos, más 1 milésimo, más 6 diezmilésimos.

Un número escrito de manera semejante en otra base, lo podremos pasar fácilmente a base 10. Por ejemplo $21.012_3 = 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 + 0 \times 3^{-1} + 1 \times 3^{-2} + 1 \times 3^{-3}$, que a su vez es lo mismo que $21.012_3 = 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 + 0 \times (1/3) + 1 \times (1/9) + 1 \times (1/27)$. Al hacer las operaciones respectivas tendremos que $21.012_3 = 193_{10}/27_{10} = 7.148148\ldots$ Que es un número con período 148 en base 10, pero no lo era en base 3, o mejor dicho, su período era 0 en base 3 (esto es $21.012_3 = 21.01200000000000000\ldots_3$).

Quizá te preguntes cómo debemos pasar un número, con decimales, que está expresado en base **10** hacia otra base. La respuesta es sencilla, sólo deberemos ponerlo en suma de fracciones que tengan numerador entero y divisor de potencias de la base. Por ejemplo: Escribir en base **3** al número 0.25

Iniciamos con la magnitud de 3^{-1}, averiguamos cuántos tercios hay, multiplicando por 3/3:

$0.25 = \frac{3\times 0.25}{3} = \frac{0.75}{3} = \frac{0}{3} + \frac{0.75}{3}$ No llega a 1/3, por lo tanto, el primer dígito será 0 y el segundo sumando pertenecerá a otra potencia menor, a la de 3^{-2} y averiguamos cuántos novenos hay, multiplicando por 3/3.

[2] Silvio Rodríguez en *Pequeña serenata diurna*

$\frac{0.75}{3} = \frac{3\times 0.75}{3\times 3} = \frac{2.25}{3^2} = \frac{2}{3^2} + \frac{0.25}{3^2}$ Hay 2/9, por lo tanto, el siguiente dígito es 2 y el segundo sumando pertenecerá a otra potencia menor, a la de 3^{-3}, y para averiguar el dígito del siguiente orden volvemos a multiplicar por 3/3.

$\frac{0.25}{3^2} = \frac{3\times 0.25}{3\times 3^2} = \frac{0.75}{3^3} = \frac{0}{3^3} + \frac{0.75}{3^3}$ No hay enteros para los veintisieteavos, por lo tanto, el siguiente dígito es 0 y el segundo sumando pertenecerá a otra potencia menor, a la de 3^{-4}. Para averiguar el dígito del siguiente orden volvemos a multiplicar por 3/3.1

$\frac{0.75}{3^3} = \frac{3\times 0.75}{3\times 3^3} = \frac{2.25}{3^4} = \frac{2}{3^4} + \frac{0.25}{3^4}$ Hay 2/81, por lo tanto, el siguiente dígito es 2 y el segundo sumando pertenecerá a otra potencia menor, a la de 3^{-5} y podemos seguir de la misma manera hasta donde lo requiramos.

En este caso observamos que se vuelve un número periódico, por lo que podemos suspender el proceso. Lo que hemos encontrado es que $0.25_{10} = 0.020202\ldots_3$. No obstante, siempre podemos obtener el resultado con la aproximación que queramos.

Cuando pasamos un entero de base 10 a otra base, hicimos unas divisiones consecutivas y fuimos escribiendo los dígitos considerando los residuos. En el caso de los decimales, nos damos cuenta que si hacemos multiplicaciones sucesivas y vamos escribiendo los dígitos considerando las partes enteras que obtuvimos el asunto se hace mecánico. Esto no es algo menor, pues cuando logramos establecer un algoritmo que funcione mecánicamente estamos en condiciones de decirle a una máquina cómo lo haga. ¡Qué tristeza! ¿Verdad? Los profesores que enseñan de esta manera nos ven como máquinas: “Tú hazle así y no preguntes”. Sí, pero es más triste cuando el alumno dice “Usted dígame cómo lo hago y ya. No me quiera confundir con explicaciones”.

Claro que podríamos haber encontrado lo mismo sabiendo que $0.25_{10} = 1_{10}/4_{10} = 1_3/11_3$ y hacer la división indicada en base 3, pero la cuestión operativa y de manipulación en esta base requiere de aprenderse las tablas de la base y mecanizar, tal como aprendimos en la primaria.

Como curiosidad a la aproximación hacia un número específico, mediante las cifras decimales (me refiero a las magnitudes de potencias negativas de la base), en este caso en los binarios, está esta liga muy interesante:

https://www.gaussianos.com/el-metodo-de-fujimoto-o-como-dividir-un-papel-en-partes-iguales/?utm_campaign=rss-gaussianos-20200501&utm_medium=email&utm_source=acumbamail

Un buen ejercicio para ver qué tanto has asimilado la esencia de los algoritmos aritméticos, más allá de la mecanización es la de operar con otra base.

La base **3**, que solamente emplea a los dígitos 0, 1 y 2, y se tiene que:

$1_3 = 1_{10}$	$21_3 = 7_{10}$	$111_3 = 13_{10}$	$201_3 = 19_{10}$	$221_3 = 25_{10}$
$2_3 = 2_{10}$	$22_3 = 8_{10}$	$112_3 = 14_{10}$	$202_3 = 20_{10}$	$222_3 = 26_{10}$
$10_3 = 3_{10}$	$100_3 = 9_{10}$	$120_3 = 15_{10}$	$210_3 = 21_{10}$	$1000_3 = 27_{10}$
$11_3 = 4_{10}$	$101_3 = 10_{10}$	$121_3 = 16_{10}$	$211_3 = 22_{10}$	$1001_3 = 28_{10}$
$12_3 = 5_{10}$	$102_3 = 11_{10}$	$122_3 = 17_{10}$	$212_3 = 23_{10}$	$1002_3 = 29_{10}$
$20_3 = 6_{10}$	$110_3 = 12_{10}$	$200_3 = 18_{10}$	$220_3 = 24_{10}$	$1010_3 = 30_{10}$

Como ves, puedes seguir así hasta donde quieras. Existirán también tablas de sumar y multiplicar:

Tabla de suma

+	**0**	**1**	**2**	**10**
0	0	1	2	10
1	1	2	10	11
2	2	10	11	12
10	10	11	12	20

Tabla de multiplicación

×	**0**	**1**	**2**	**10**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	10
2	0	2	11	20
10	0	10	20	100

Asimismo, puedes emplear los algoritmos comunes para sumar, restar, multiplicar, o dividir también en la base 3 (o cualquiera), siempre y cuando uses las tablas adecuadamente.

Mira los ejemplos siguientes y trata de seguirlos considerando las tablas dadas.

$$\begin{array}{r} 122 \\ +\ 201 \\ 21 \\ \hline 1121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1021 \\ -\ \ 102 \\ \hline 212 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 122 \\ \times\ 212 \\ \hline 1021 \\ 122 \\ 1021 \\ \hline 112111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.102 \\ \times\ 2.01 \\ \hline 2102 \\ 0000 \\ 11211 \\ \hline 12.00202 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 1100.0202 \\ \hline 11 & 12101. \\ & 11 \\ & \ \ 00100 \\ & \qquad 0100 \\ & \qquad\quad 01 \end{array}$$

Este es un momento importante para que reflexiones que las propiedades de los números son algo que trasciende al sistema de numeración que sirva para expresarlos. Por ejemplo, el número **siete** es un número primo y no importa en qué base se escriba. Lo mismo sucede con las operaciones definidas entre los números, por ejemplo, la suma y la multiplicación son conmutativas, y la segunda es distributiva respecto a la primera; y todo ello no tiene que ver con la manera en la que escribes los números que operas.

Sin embargo, hay otras que sí, como el caso de los criterios de divisibilidad y la periodicidad al escribirse en forma decimal. Sin embargo, tanto los criterios como la periodicidad tienen fundamentos matemáticos que podemos extrapolar. Va un ejemplo de lo segundo. En base 10, sabemos que (y tal vez hasta lo demostraste):

0.11111111… = $0.\overline{1}$ = 1/9 La línea superior significa que, a partir de ese lugar, esa cifra se repite indefinidamente.

0.12121212… = $0.\overline{12}$ = 12/99 = 4/33

0.123123123… = $0.\overline{123}$ = 123/999 = 41/ 333

0.12341234… = $0.\overline{1234}$ = 1234/9999

0.050505…. = $0.\overline{05}$ = 05/99 = 5/99

Extrapolando la idea, debe ser cierto que $0.020202\ldots_3$ = $0.\overline{02}_3$ = $02_3/22_3$, porque el nueve en base 10 es el dígito más alto, por tanto, su equivalente en base 3 es el 2

También puedo decir que $02_3/22_3 = 01_3/11_3$ (le sacamos mitad).

(O aunque no le sacáramos mitad.) Sabemos que la fracción la podemos escribir en base 10 como $2_{10}/8_{10} = 1_{10}/4_{10} = 0.25$. ¡Pero ya teníamos esto antes: $0.25_{10} = 0.020202..._3$!

Por lo tanto, sí es verdad que $0.020202..._3 = 02_3/22_3$.

Es importante aclarar que aquellos números que tienen período **0** (cero) tienen dos formas de escribirse (sin importar la base que se use, piénsalo…).

Ejemplos: $1.25\overline{0} = 1.24\overline{9}$; $0.32\overline{0}_5 = 0{,}31\overline{4}_5$;

$7.41\overline{0}_8 = 7.40\overline{7}_8$; $0.101\overline{0}_2 = 0.100\overline{1}_2$

8. Más ejercicios y problemas

13. Escribe el número equivalente en base **10**. Procura hacerlos mentalmente los que puedas, si no te es fácil porque no te sabes las tablas de multiplicar y las potencias cuadradas o cúbicas, entonces ponte a operar a mano, incluso ayúdate con la calculadora (y esperemos que sí veas bien las teclas y que tus dedos no tiemblen para no picarle a otra, porque la calculadora tampoco es mágica, ¿qué mal chiste, verdad?).

a) 18_9	g) 10_5	m) 010_3	r) ABC_{16}
b) 37_8	h) 10_{12}	n) 0010_4	s) $1F3_{16}$
c) 201_5	i) 10_{16}	ñ) 111_2	t) 12.4_8
d) 10_2	j) 1000_2	o) 222_3	u) $A5.02_{16}$
e) 10_3	k) 1000_3	p) 444_5	v) 0.01_3
f) 10_4	l) 1000_5	q) FFF_{16}	w) 10.003_4

14. Da todos los conjuntos de dígitos, en base **5**, tales que los números que se puedan formar permutando los elementos del conjunto sean todos números primos.

Por ejemplo: uno de estos conjuntos es el {1,2}, ya que sólo se pueden formar los números $12_5 = 7_{10}$ y $21_5 = 11_{10}$, que son primos.

15. Los siguientes números están escritos en base **10**. Escribe cada uno de ellos en la base b solicitada

a) 135, b = 2

b) 135, b = 6

c) 135, b = 12

d) 135, b = 16

e) 207, b = 2

f) 207, b = 4

g) 207, b = 8

h) 207, b = 16

i) 3.2, b = 2

j) 1.4, b = 3

k) 2.01, b = 8

l) 3.12, b =12

16. Resuelve la siguiente ecuación: $1x_{16} = 26_x$, donde $1x_{16}$ es un número de dos dígitos en base 16; análogamente, 26_x es un número de dos dígitos en base x.

17. Considera la ecuación $\sqrt{0.\bar{x}_b} = 0.\bar{y}_b$, con x e y, enteros no negativos de un solo dígito y ambos menores que la base b. Las soluciones son parejas ordenadas de números enteros (x, y). Si estamos en base 10, además de la solución trivial (0, 0), también está la (1, 3) (¿serán las únicas?: no, faltan dos). Encuéntralas todas.

18. Efectúa las siguientes operaciones, sabiendo que los números están expresados en la base que se indica. El resultado también debes darlo en esa base. (Practica las operaciones en la base que se indica.)

a) $32_7 + 15_7$

b) $101.01^2{}_6$

c) $3201_4 \times 12_4$

d) $40_5 \div 3_5$

e) $10F_{16} + F1_{16}$

f) $40201_8 \div 5_8$

g) $A0B0A_{12} \times AB_{12}$

h) $0B0E_{16} - FA_{16}$

19. ¿Recuerdas algunos trucos para aprenderse las tablas, particularmente lo que debía ocurrir con la suma y el orden de los dígitos en el resultado de la tabla del 9 en base 10? Aquí van unas tablas en distintas bases.

a) ¿Qué tienen como mnemotecnia?

b) Enuncia la "regla" que van a seguir la suma y el orden de los dígitos en el resultado de la tabla de multiplicar del número b – 1 en la base b, del 1_b al 10_b.

c) Siguiendo esa regla, escribe la tabla de multiplicar desde el 1_{16} hasta el 10_{16}.

No te lo pedimos aquí, pero sería interesante que te impusieras el reto de demostrar que la regla del inciso b) debe funcionar en cualquier base.

Base 10	Base 11	Base 12	Base 13	Base 14	Base 15
9 × 1 = 9	A × 1 = A	B × 1 = B	C × 1 = C	D × 1 = D	E × 1 = E
9 × 2 = 18	A × 2 = 19	D × 2 = 1A	C × 2 = 1D	D × 2 = 1C	E × 2 = 1D
9 × 3 = 27	A × 3 = 28	D × 3 = 29	C × 3 = 2A	D × 3 = 2B	E × 3 = 2C
9 × 4 = 36	A × 4 = 37	D × 4 = 38	C × 4 = 39	D × 4 = 3A	E × 4 = 3B
9 × 5 = 45	A × 5 = 46	D × 5 = 47	C × 5 = 48	D × 5 = 49	E × 5 = 4A
9 × 6 = 54	A × 6 = 55	D × 6 = 56	C × 6 = 57	D × 6 = 58	E × 6 = 59
9 × 7 = 63	A × 7 = 64	D × 7 = 65	C × 7 = 66	D × 7 = 67	E × 7 = 68
9 × 8 = 72	A × 8 = 73	D × 8 = 74	C × 8 = 75	D × 8 = 76	E × 8 = 77
9 × 9 = 81	A × 9 = 82	D × 9 = 83	C × 9 = 84	D × 9 = 85	E × 9 = 86
9 × 10 = 90	A × A = 91	D × A = 92	C × A = 93	D × A = 94	E × A = 95
	A × 10 = A0	D × D = A1	C × D = A2	D × B = A3	E × B = A4
		D × 10 = D0	C × C = D1	D × C = B2	E × C = B3
			C × 10 = C0	D × D = C1	E × D = C2
				D × 10 = D0	E × E = D1
					E × 10 = E0

20. Determina la base b en la que están escritas las siguientes operaciones, señalando los casos donde hubiera restricciones para la base:

a) 14 + 15 = 32

b) 5 × 4 = 26

c) 1001 ÷ 21 = 112

d) 10 + 4 = 14

e) 10 × 10 = 100

f) 4 + 3 = 5

g) 110 – 13 = 75

21. Sea M_b un número capicúa de una cantidad impar de cifras, en la base b, con el dígito 1 en la primera y última cifras, el dígito 2 en la segunda y penúltima cifras, el dígito 3 en la tercera y antepenúltima cifras, y así sucesivamente. Dos de estos números son: 121_b (con $b > 2$) y 123454321_b (con $b > 5$).

a) ¿Cuántos números distintos de este tipo se pueden formar en una base b, dada?

b) Demuestra que M_b siempre es un cuadrado perfecto. (Sugerencia: Indaga de qué número debe ser el cuadrado.

9. Vídeos

Cambiar numerales de una base a otra

https://youtu.be/dJYFXTOo4g8

Sumar en otras bases

https://youtu.be/VCpl5E8RiKM

Restar en otras bases

https://youtu.be/G0dvlw5BPEg

Multiplicar en otras bases

https://youtu.be/PSXiGqBONgo

Dividir en otras bases

https://youtu.be/sJwzLmIbGug

10. Soluciones

1. El 16_{10} es 10000_2 e irá sólo en la quinta carta; el $17_{10} = 10001_2$, por tanto, irá en la primera y quinta cartas; $18_{10} = 10010_2$, por tanto, irá en la segunda y quinta cartas.

2. Puesto que $100_{10} = 1100100_2$, se requieren de siete cartas, una para cada dígito. Con ellas se podría llegar a adivinar hasta 127 y cada carta tendría 64 numerales, en este último caso. Sin embargo, para tener hasta 100 no participarían los numerales correspondientes a 101, 102, 103, …, 127.

En la primera carta no estarían los 14 impares citados, es decir habría 50 numerales.

En la última carta faltarían los numerales del 101 al 127, es decir, faltarían 27, y tendría 37 numerales.

En todas habría que eliminar al 127 pues va en todas ellas ya que $127_{10} = 1111111_2$.

Ahora, hagámoslo a fuerza bruta, uno por uno para obtener lo de las restantes cartas.

El $126_{10} = 1111110_2$ debe ser eliminado en todas, pero no va en la primera.

El $125_{10} = 1111101_2$ debe ser eliminado también de la tercera a la sexta.

El $124_{10} = 1111100_2$ debe ser eliminado también de la tercera a la sexta.

El $123_{10} = 1111011_2$ debe ser eliminado también de la segunda y de la cuarta a la sexta.

Bueno, síguele tú, sólo es cosa de escribirlo en base dos y ver donde hay unos. ¿Habrá otra manera más sencilla? Coméntalo con tus compañeros a ver si la encuentran y me la dicen.

3. Esta es la segunda carta de un juego que, al menos tiene tres cartas. Sin embargo, podría tener 4 y la última carta tener al 8 y quizás al 9, pero no más.

4. Se requieren n cartas y cada una tendrá escritos 2^{n-1} números. La razón es porque el número 2^n-1 al ser escrito en base 2 tiene n unos y ningún cero, por tanto, se requieren n cartas. En la carta k, estarán los números que en base 2 tengan un 1 en el lugar correspondiente a 2^{k-1} que serán, en cantidad, tantos como las que lleven 0 en dicho lugar, es decir, "mitad y mitad" de los 2^n porque éste no está y sería el que complete el par para obtener la mitad.

5. Es claro que si extraemos el conjunto de k + 1 cartas para todas las potencias de la forma $2^i \leq 2^k \leq n$, $\forall\, i$ con $0 \leq i \leq k$ tendremos un juego “Las tablas del Rey Salomón”. El valor máximo para k lo obtenemos despejando a k de $2^k = n$, pero k debe ser entero. Así, $k = \lfloor \log n / \log 2 \rfloor$. Quizá no estés familiarizado con esto último. Así que va un Breviario sobre ello.

A la operación inversa de la *exponenciación* se le llama *logaritmación*.

No hay que confundirla con la *potenciación*, cuya operación inversa es la *radicación*.

En otras palabras, una cosa es 2^x y otra es x^2.

Así, si $2^x = 3$, entonces $x = 1.5849625\ldots$, y

si $x^2 = 3$ entonces $x = \sqrt[2]{3} = 1.7320508075688772935274463415059\ldots$

Como puedes ver, la potenciación es una operación matemática entre dos términos denominados: base a y exponente n. Se escribe a^n y se lee normalmente como «a elevado a la n». Hay algunos números exponentes especiales como el 2, que se lee al cuadrado o el 3, que se lee al cubo y sus respectivas operaciones inversas son la raíz cuadrada y la raíz cúbica respectivamente. Por otra parte, la logaritmación es el proceso de hallar el exponente al cual fue elevada la base para obtener un número.

En matemáticas se define el logaritmo en base a de un número positivo x como el exponente al que hay que elevar la base para obtenerlo (con apositivo y distinto de 1). Así, $\log_a x = L$ si y sólo si $a^L = x$.

Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ pues $2^3 = 8$; $\log_8 2 = 1/3$ pues $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$; como $(0.5)^{-3} = 8$, entonces $\log_{1/2} 8 = -3$ (observa que los logaritmos sí pueden ser negativos, pero no pueden serlo la base ni el número al que se le saca logaritmo).

Para obtener cualquier logaritmo podemos hacer uso de la calculadora, pero éstas sólo traen logaritmos en dos posibles bases: La base $e = 2.718281828\ldots$ y la base 10; los primeros se llaman logaritmos decimales y los segundos, logaritmos naturales. Para los logaritmos en base10 no requerimos escribir la base; en el primer caso $\log_{10} x$ se escribe $\log x$; en el segundo, $\log_e x$ se escribe $\ln x$.

No importa en cual base a $(0 < a \neq 1)$ se esté calculando el logaritmo, siempre ocurrirá que

a) $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, pues $a > 0$

b) $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$, pues $a > 0$

c) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

d) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

e) $\log_a (x^n) = n \log_a x$

f) $\log_a (\sqrt[n]{x}) = (1/n) \log_a x$

Respecto a los corchetes $\lfloor x \rfloor$ se define como la función entera (llamada también "función piso") y es el valor del entero menor o igual que x. Así, $\lfloor 4.7 \rfloor = 4$; $\lfloor 0.3 \rfloor = 0$ y $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$.

6. Ve la solución en https://www.youtube.com/watch?v=ZnhHpr_ipgE

Aquí se puede ver que los números binarios juegan un papel trascendental para la respuesta que da Nathan, pero más importante es el principio de *descenso infinito*. En una olimpiada de matemáticas, como alumno, cabe hacer la siguiente pregunta: "¿Puedo elegir la última carta, la de la del extremo derecho para empezar?" La respuesta será: "No, ya que no puedes voltear la carta de la derecha, pues no existe". Hay formas de resolver el problema sin acudir al sistema binario, pero así es lo más fácil.

7. No es cierta la afirmación que piden demostrar [la demostración la haremos dando lo que se llama un *contraejemplo*, es decir un ejemplo que refuta la afirmación a demostrar, y con ello exponemos que ésta es falsa] pues existe al menos una secuencia que puede continuar indefinidamente. Llamémosle carta 1 a la carta con la que iniciamos el primer movimiento, el siguiente movimiento se hace con la tercera carta, después con la quinta, etc., es decir los movimientos se hacen en las cartas de número impar hasta la carta 17, con lo cual quedarán solamente las cartas 19 y 20 aún hacia adentro, después de 9 movimientos.

Aquí está un punto crucial de la demostración: Hay dos cartas consecutivas con la cara hacia adentro y las restantes están con la cara hacia afuera.

El siguiente movimiento lo hacemos con la carta 20, le daremos vuelta a ésta y a la carta que sigue, la 1, con lo cual quedará ahora la carta 1 con la figura hacia adentro, lo mismo que está la 19. Ahora, los movimientos serán en cartas consecutivas iniciando con la 1 que dejará a la 2 con la figura hacia adentro. Continuamos el proceso hasta la carta 17 y quedarán las cartas 18 y 19 con la figura hacia adentro, con lo cual estamos como antes: con dos cartas consecutivas con la figura hacia adentro. Ya sabemos qué hacer: efectuamos el movimiento con la carta de la derecha y después de 17 movimientos más quedarán otra vez dos cartas consecutivas, la 17 y la 18 con la figura hacia adentro. El proceso se repite indefinidamente.

8. a) Sí, si n es par, la secuencia es iniciar con la primera carta, el siguiente movimiento se hace con la tercera carta, después con la quinta, etc., es decir los movimientos se hacen en las cartas de número impar hasta que el último movimiento se hace con la carta $n - 1$. En total son $n/2$ movimientos.

b) No, si n es impar mayor que 1. Esto se debe a que, si cambias dos ~~consecutivas~~ que estén con la cara hacia arriba, te quedará un número impar de cartas hacia abajo. Pero cuando cambias dos cartas donde una está boca arriba y la otra hacia abajo, te seguirán quedando una cantidad impar de cartas boca arriba. En cualesquiera de los dos casos siempre habrá cartas boca arriba. (¡Oh! ¿Ya te diste cuenta que no es necesaria la palabra consecutivas en la demostración? Por eso la taché y no lo mencioné tampoco en el subrayado. Eso quiere decir que, si tienes una cantidad impar, mayor que 1, de cartas, y el movimiento es cambiar dos cualesquiera, nunca podrás tener todas las cartas boca arriba, si en la posición inicial tienes todas boca abajo.)

(Pregunta en serio, sólo para filósofos: ¿Qué pasa si $n = 0$? Piensa bien la respuesta y discútela con tus compañeros.)

9. a) Sí, si n es par, porque podemos reducirlo al problema anterior si a la carta con la que iniciamos le llamamos carta 1 y a las siguientes hacia la derecha les llamaremos 2, 3, 4, etc. hasta n que será la anterior a la carta 1. La secuencia es iniciar con la carta 1, el siguiente movimiento se hace con carta 3, después con la 5, etc., es decir los movimientos se hacen en las cartas de número impar hasta que el último movimiento se hace con la carta $n - 1$. En total son $n/2$ movimientos.

b) No, si n es impar mayor que 1. La demostración es idéntica a la del problema 3 para el caso de n impar. (Pregunta más que difícil para los filósofos: ¿Qué pasa si $n = 1$?)

10. Si hiciste bien las divisiones sucesivas y acomodaste correctamente, de derecha a izquierda, los residuos, obtuviste que: $1000_{10} = 1111101000_2 = 33220_4 = 1750_8$.

11. Dado que 4, 8 y 16 son potencias de 2, es muy fácil pasar de base 2 a las otras.

a) Para pasar de base 2 a base 4, se agrupan los dígitos en pares sucesivos y se escriben, en ese orden, los valores que representa cada par. No habrá ningún problema ya que un número en base 2 que utilice dos dígitos sólo podrá tomar los valores 0, 1, 2 o 3, todos permisibles en base 4.

b) Para pasar de base 2 a base 8, se agrupan los dígitos en ternas sucesivas y se escriben, en ese orden, los valores que representa cada terna.

c) Para pasar de base 2 a base 16, se agrupan los dígitos de cuatro en cuatro de manera sucesiva y se escriben, en ese orden, los valores que representa cada grupo.

d) Puesto que 16 también es potencia de 4, se puede pasar de una base a la otra. Para pasar de base 2 a base 4, se agrupan los dígitos en pares sucesivos y se escriben, en ese orden, los valores que representa cada par.

Es importante hacer notar que, si se puede pasar de base 2 a base 4, también será fácil hacerlo de base 4 a base 2 mediante un proceso similar: Cada dígito del numeral de base 4 se va escribiendo en base 2, ocupando dos lugares. Así, $321_4 = 111001_2$. De manera similar para los otros cambios de base.

12. En todos los casos se trata del mismo número 16 escrito en distintas bases, consecutivamente desde la base 16 hasta la base 2, por tanto, el numeral que falta es el 16 en base tres: 121.

13. Sólo se trata de que practiques los cambios de base, *talacha* necesaria para mecanizar el proceso. Casi todos los debiste hacerlos mentalmente.

a) 17	g) 5	m) 3	r) 2748
b) 31	h) 12	n) 4	s) 499
c) 26	i) 16	ñ) 7	t) 10.5
d) 2	j) 8	o) 26	u) 165.0078125
e) 3	k) 27	p) 124	v) $1/9 = 0.\overline{1}$
f) 4	l) 1125	q) 4095	w) 4.046875

Del inciso d) al j) se trata de la base

En los incisos de ñ) al q) son una unidad menos que la tercera potencia de la base: ñ) $2^3 - 1$; o) $3^3 – 1$; p) $4^3 – 1$; q) $16^3 – 1$

Del inciso t) al w) era más fácil considerar la parte fraccionaria por separado y hacer (incluso mentalmente) los “quebrados” antes:
t) 10 + 4/8 = 10 + 1/2; u) 165 + 2/256; v) 1/9; w) 4 + 3/64

14. Son 5 dígitos y habría $2^5 = 32$ subconjuntos, uno de ellos es el vacío (¿debo considerar a éste o no?, piensa bien tu respuesta antes de seguir).

Debo quitar o los que contienen a 0 ya que una de las permutaciones no será primo pues será divisible entre 5, con lo cual la cantidad de subconjuntos se reduce a $2^4 = 16$ (¡chispas, sigue el conjunto vacío!, ¿lo elimino o no?):
∅,
{1}, {2}, {3}, {4},
{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4},
{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4},
{1, 2, 3, 4}

Ya puedo quitar algunos “a mano” (¿elimino o no a ∅?), de la segunda línea quedan {2}, {3}

De los conjuntos de dígitos que me quedan {1, 2, 3, 4} habré de quitar aquellos cuya suma de potencias me dé un número par: $d_0 + 5d_1$; $d_0 + 5d_1 + 25d_2$; $d_0 + 5d_1 + 25d_2 + 125d_3$, con $d_i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

De dos dígitos quitaré los que la suma $d_0 + 5d_1$ me dé un par, es decir par + par (sólo {2, 4}) o impar + impar (sólo {1, 3})

De tres dígitos quitaré los que la suma $d_0 + 5d_1 + 25d_2$ que me dé un par, es decir par + par + par (no hay) o impar + impar + par (los que tengan un par y dos impares, que son {1, 2, 3} y {1, 3, 4},

El conjunto de cuatro dígitos no entra pues de los 24 numerales que forma, la mitad de ellos es par, uno de ellos es $1234_5 = 194_{10}$.

Por lo tanto, sólo nos quedan por analizar a los conjuntos:

∅,
{2}, {3},
{1, 2}, {1, 4}, {2, 3}, {3, 4},
{1, 2, 4}, {2, 3, 4}

Tres de ellos se quedan porque son obvios los de un dígito y el otro se nos dio al inicio como ejemplo.

$14_5 = 9_{10}$, se elimina {1, 4}

$23_5 = 13_{10}$, primo; $32_5 = 17_{10}$, primo. {2, 3} se queda.

$34_5 = 19_{10}$, primo; $43_5 = 23_{10}$, primo. {3, 4} se queda

$124_5 = 39_{10}$, divisible entre 3, se elimina {1, 2, 4}.

$234_5 = 69_{10}$, divisible entre 3, se elimina {2, 3, 4}.

El conjunto vacío no tiene elementos. Así una propiedad expresada mediante un predicado (como «ser guapo» o «ser un número primo») la cumplen todos sus elementos. Por eso podemos decir que: "los números que se puedan formar permutando los elementos del conjunto son todos números primos" y al que quiera refutarlo, le inquirimos: "A ver, dame un contraejemplo. ¿Cuál permutación no lo cumple?" Y obviamente no podrá mostrarla.

Pero ¡ojo!: sus elementos también cumplen lo contrario de la afirmación: "ninguno de los números que se puedan formar permutando los elementos del conjunto son números primos" y será cierto, porque no podemos mostrar alguno que sí lo sea.

Entonces es mejor excluirlo "decentemente": De los conjuntos que no son vacíos, solamente: {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3} y {3, 4} cumplen con lo pedido: los numerales, en base 5, que se puedan formar permutando los elementos de cualquiera de dichos conjuntos son todos números primos.

15. a) 10000111_2

b) 343_6

c) $B3_{12}$

d) 87_{16}

e) 11001111_2

f) 3033_4

g) 317_8

h) CF_{16}

i) $11.\overline{0011}_2 = 11_2 + 11_2/1111_2$

j) $1.\overline{1012}_3 = 1_3 + 1012_3/2222_3$

k) $2.0\overline{05075\ldots}_8$ (período con 20 dígitos)

l) $3.\overline{15343A0B\ldots}_{12}$ (periodo con 20 dígitos)

16. Para resolverla, pongamos la ecuación $1x_{16} = 26_x$ en su notación desarrollada en potencias de la base, con el fin de usar la base 10.

$1 \times 16^1 + x \times 16^0 = 2 \times x^1 + 6 \times x^0$ la cual queda como $16 + x = 2x + 6$, de donde $x = 10$.

Es decir, la igualdad $1A_{16} = 26_{10}$ debe cumplirse, y efectivamente, se cumple.

17. $\sqrt{0.\bar{x}} = 0.\bar{y}$ es equivalente a $0.\bar{x} = (0.\bar{y})^2$. Ahora bien, al considerar que todo número periódico es racional, por tanto puede escribirse como cociente de dos enteros tenemos que la ecuación anterior puede escribirse como $\frac{x}{9} = (\frac{y}{9})^2$, y ésta como $9x = y^2$. De aquí surgen dos posibilidades inmediatas: (0, 0) y (9, 9). Ya teníamos también a (1, 3). Como $9x$ es un cuadrado y 9 ya lo es, entonces x debe ser un cuadrado y el único restante es el 4, con lo que obtendremos que $36 = y^2$, es decir $y = 6$. Así $\sqrt{0.\bar{4}} = 0.\bar{6}$.

En efecto: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Si crees haber entendido, y además quieres un problema en otras bases, a ver si tomas este reto: Da la menor base para la cual la ecuación del problema 17 tiene exactamente **seis** soluciones. En el siguiente párrafo está la respuesta y una sugerencia para la solución.

La respuesta es: “En base 26”, con soluciones (escritas en base 10):

(0, 0), (1, 5), (4, 10), (9, 15), (16, 20) y (25, 25);

o recordando que A = 10, B = 11, C = 12, etcétera puedes escribirlo en base 16 como:

(0, 0), (1, 5), (4, A), (9, F), (10, K) y (Q, Q).

(Nota que no consideré a la I, Ñ y O pues me son de fácil confusión.)

Claro que lo puedes resolver a “fuerza bruta”, sea manualmente, con una hoja de Excel o programando. Sin embargo, el reto es encontrar otro camino. No te diré cual, pero puedes intentarlo replanteando los numerales como a fracciones en base b como sigue: Elevo al cuadrado y considero que un periódico de un solo dígito en base b puede escribirse como una fracción con denominador $b - 1$. Así, $\frac{x}{b-1} = (\frac{y}{b-1})^2$. Lo que sigue es: $(b - 1)x = y^2$. Una solución es (0, 0) y otra es $(b - 1, b - 1)$ en cualquier base; por lo tanto siempre hay al menos dos soluciones. (¡Qué cosa tan curiosa en base 2!)

Si $x \neq 0$, puesto que todos son enteros, entonces x y $(b - 1)$ deben dividir a y^2; esto último significa que y^2 es múltiplo de ambos, pero si $y \neq b - 1$, y no puede ser múltiplo de $b - 1$... (¿Sabes propiedades de la factorización? ¿Cuántos divisores puede tener un número determinado?)

18. La intención de este ejercicio es que tu pensamiento operacional se automatice abstrayendo las ideas algebraicas que constituyen los algoritmos usuales.

a) 50_7

b) 10203.0201_6

c) 111012_4

d) $11.\overline{31}_5$

e) 200_{16}

f) $6346.\overline{4631}_8$

g) $9200A12_{12}$

h) $A14_{16}$

¿Qué tal les fue? Practicaron sí, pero en mi caso, no fueron pocas las veces en que al comprobar me di cuenta que me había equivocado; pero eso no fue todo, también algunas veces me equivoqué cuando efectué la comprobación. Si no tuvieron errores, los felicito, pero si los tuvieron y se dieron cuenta de qué los provocó y, además eso les sirvió para mejorar sus métodos de ejecución y comprobación, ¡los felicito enormemente porque están madurando! ¿Te atreves a hacerlo como en la primaria?: $\sqrt{10_2}$. A ver cuántas cifras lo puedes aproximar.

19. a) Para la tabla del 9 en base 10, nos dijeron que escribiéramos en la tabla las multiplicaciones empezando por “9 × 1 =” y terminando en “9 × 10 =”; y para escribir los resultados pusiéramos en las unidades los dígitos en orden descendente desde el 9 hasta el 0; luego escribiéramos las decenas colocando nuevamente los dígitos en orden descendente desde el 9 hasta el 0, pero iniciando desde abajo. La tabla del 9 tiene la particularidad de que los resultados del producto suman 9, con ello comprobaríamos que los escribimos correctamente.

b) Al ver las tablas del número b – 1 en la base b, del 1_b al 10_b, se nos ocurre expandir la regla para cualquier base y comprobamos que sí funciona. Por ejemplo, para la base 5.

Base 5
4 × 1 = 4
4 × 2 = 13
4 × 3 = 22
4 × 4 = 31
4 × 10 = 40

Así la “regla” sería: Para la tabla del número b – 1 en la base b, escribe en la tabla las multiplicaciones empezando por “(b – 1) × 1 =” y terminando en “(b – 1) × 10_b =”; y para escribir los resultados hay que poner en las unidades los dígitos en orden descendente desde el b – 1 hasta el 0; luego anotar las decenas colocando nuevamente los dígitos en orden descendente desde el b – 1 hasta el 0, pero iniciando desde abajo. La tabla del b – 1 tiene la particularidad de que los resultados del producto suman b – 1, con ello comprobaríamos que los escribimos correctamente.

Esta última recomendación sólo trata de dar un elemento para comprobar que no faltó o sobró algún renglón en la tabla, pero, escrito así, trasciende hasta los criterios de divisibilidad. Será cierto un criterio así.

En matemáticas, por muy bonitas que nos resulten las intuiciones, siempre será necesario comprobar la veracidad de nuestras afirmaciones. Así que aquí te queda un reto más.

c) Compruébalo comparando con lo que tuvieron tus compañeros o haciendo la tabla con una calculadora.

20. a) 14 + 15 = 32 es equivalente a b + 4 + b + 5 = 3b + 2, es decir b = 7: $14_7 + 15_7 = 32_7$ cuya equivalencia en base 10 es $11_{10} + 12_{10} = 23_{10}$

b) Lo ponemos en base 10 y obtenemos 5 × 4 = 2 b + 6, cuya solución es b = 7

c) Lo ponemos en base 10 y obtenemos $\frac{b^3+1}{2b+1} = b + 1$, que es equivalente a $(b+1)(b^2 - b + 1) = (2b + 1)(b + 1)$, sabemos que $b \neq -1$, por tanto $b^2 - b + 1 = 2b + 1$ la cual equivale a $b\ (b - 1) = 2b$, también $b \neq 0$, por tanto, $b - 1 = 2$, con lo cual $b = 3$. La comprobación es $1001_3 \div 21_3 = 11_3$, lo que en base 10 es $28_{10} \div 7_{10} = 4_{10}$.

d) En cualquier base mayor que 4

e) En cualquier base

3 f) No existe base donde esto se cumpla, pues es equivalente a 4 = 2

g) Al ponerlo en base 10 da $b^2 + b - (b + 3) = 7b + 5 \therefore b^2 - 7b - 8 = 0$, cuyas dos soluciones son $b_1 = 8$ y $b_2 = -1$, y sólo la primera es solución. Así $b = 8$, por tanto: $110_8 - 13_8 = 75_8$, que en base 10 es $72_{10} - 11_{10} = 61_{10}$.

21. a) Se pueden formar b-1 números capicúa de esa manera: 1, 121, 12321,…, hasta 123…(b – 2)(b-1) (b – 2)…321 el cual tendrá (b – 1) + (b – 2) = 2b – 3 cifras.

b) Es el resultado de multiplicar 111…111 por sí mismo, a condición de que la cantidad de cifras sea menor que la base. Puedes verlo en el resultado que se obtiene al aplicar el algoritmo común de la multiplicación: todos los renglones de los productos parciales tienen la misma cantidad de unos, y los renglones al escribirse se van desplazando un lugar consecutivamente y no habrá más de b-1 renglones. De esta manera, la suma de los unos en cada una de las columnas que definen la magnitud no será mayor que b – 1, es decir, un dígito en base b.