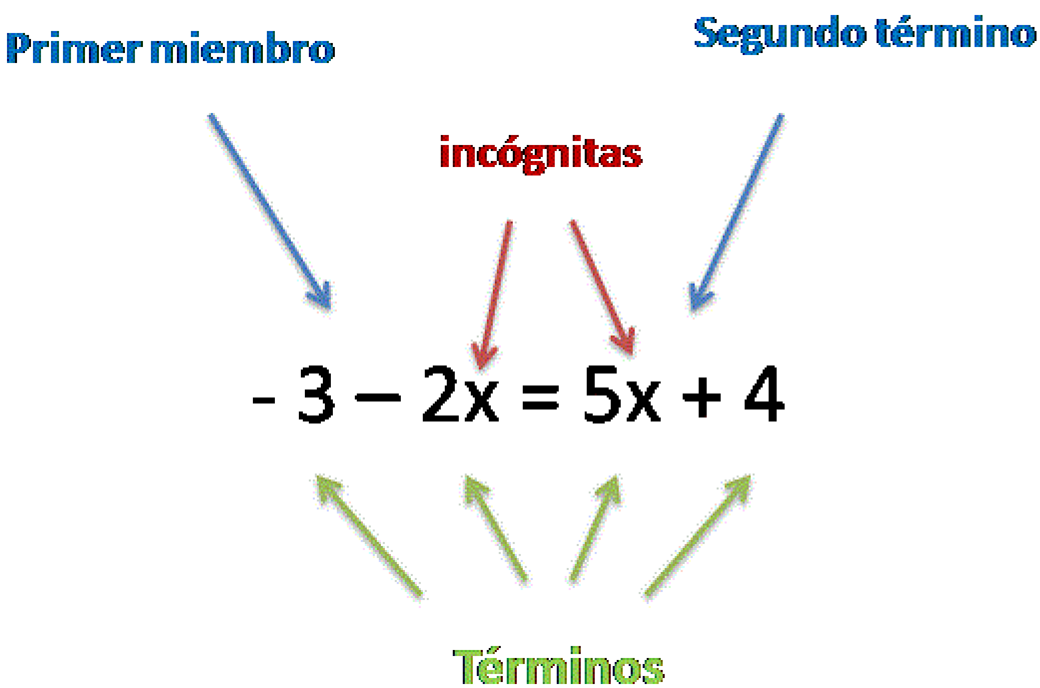
Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 4

Solución de Ecuaciones

Una de las partes más importantes al enfrentarnos a los problemas de álgebra es la de obtener el valor de las variables que estamos manipulando. Es por ello que es importante conocer (o repasar, según sea tu caso) los tipos de ecuaciones que se presentan de forma más común y sus respectivos métodos de solución métodos de resolución.

Antes de comenzar con ello, veamos las partes que componen a una ecuación de tipo ‘igualdad’:



Cada igualdad se compone de *dos miembros*, separados por el signo de *igualación* (=). Distinguimos el primer término del segundo, aunque en la práctica operan de la misma manera, La letra que tengamos es la *incógnita* o *variable*, que al momento de resolver la ecuación será su valor el que encontremos. Cada miembro está compuesto de *términos*, fácilmente reconocibles porque los separan los signos de suma o resta (inclusive las incógnitas son términos).

A partir de ahora utilizaremos estos nombres para el correcto manejo de las explicaciones.

Una última **nota importante**, como su nombre lo indica, en una igualdad el primer término y el segundo son equivalentes, de manera que cada manipulación que realicemos en uno de los términos habrá que realizarla en el otro, para no romper esta propiedad. Así pues, si quisieras restar 5 de uno de los términos, habría que restar 5 también del otro. Ahora si, estamos listos para comenzar.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para conocer el grado de una ecuación, es tan sencillo como mirar cada uno de los exponentes que acompañan a las incógnitas, sacar el mayor de ello y ese número es el que indica el grado de la igualdad. Si hablamos entonces de una ecuación de primer grado, nos estamos refiriendo a una cuyo exponente mayor que afecta a una variable es el 1. Decimos que es de una incógnita porque todas las variables son del mismo tipo.

Para la solución de una ecuación de primer grado bastaría con realizar el despeje de la variable que se nos presenta. Para un correcto despeje y evitar errores, te recomiendo que no pensemos en cada término como si "pasara al otro lado", sino que consideres si tenemos que sumar, restar, multiplicar, dividir, *exponenciar* o radicar para eliminar cada término que nos estorba para obtener el valor de nuestra variable. Veamos un ejemplo.

Consideremos la ecuación $3a - 35 = a + 11$. Para conseguir el valor de la variable, es necesario juntar todos los términos que las contengan en alguno de los términos de la igualdad (comúnmente el primero, aunque en realidad no importa) y de ahí tratar de despejarlas. Como podemos observar, en el segundo término tengo una a que no debería de estar ahí, es por ello que, para eliminarla, la resto, por lo que tengo que hacer lo mismo con el primer término. Al efectuar este paso, la igualdad nos queda de la siguiente manera:

$$3a - a - 35 = a - a + 11$$

$$2a - 35 = 11$$

Ahora que tengo todas las incógnitas en uno de los términos, solo tengo que despejar, que es lo mismo que decir que la tengo que "dejar sola". Para hacerlo, vemos que hay un -35 que le estorba. Para eliminarlo, sumo 35 a cada lado de la igualdad y obtenemos lo siguiente

$$2a - 35 + 35 = 11 + 35$$

$$2a = 46$$

Como la a no está sola todavía, tengo que seguir eliminando lo que le estora. Ahí hay un 2 que la está multiplicando, por ello, divido entre 2 cada lado para eliminarlo.

$$\frac{2a}{2} = \frac{46}{2}$$

$$a = 23$$

Como ya hemos despejado la variable, hemos obtenido la solución de la ecuación.

Si tienes más dudas sobre la solución de este tipo de ecuaciones, te recomiendo que veas este video:

https://www.youtube.com/watch?v=4h2-GpUcqwQ

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una ecuación de segundo grado es aquella cuya variable con el exponente mayor es una variable al cuadrado, es decir, con exponente 2. Existen dos métodos para resolver este tipo de ecuaciones

- <u>Método ingenioso: Factorizar</u>

Podemos utilizar los métodos de factorización que ya conocemos para obtener los valores que dan solución a una ecuación cuadrática. Nótese que dije *los valores*, pues en una ecuación cuadrática podremos encontrar hasta dos soluciones para la misma ecuación. Si quieres conocer el porqué, sin duda tienes que checar el enlace al final de esta sección.

Lo más importante que tenemos que hacer antes de empezar a resolver una ecuación de este tipo es dejar que alguno de los términos se vuelva 0 (generalmente será el segundo). Esto es porque de lo que nos va a servir factorizar va a ser para poder colocar nuestra expresión a manera de un producto que, al estar igualado a 0, se dará cuando uno de los multiplicandos sea 0. Así podremos obtener la solución fácilmente.

Consideremos la ecuación $x^2 + x = 12$. Lo primero que hay que hacer es dejar que uno de los términos sea 0. Para que el segundo término se quede en dicho valor, solo tenemos que restarle 12, por lo que lo haremos en ambos lados de la igualdad

$$x^2 + x - 12 = 12 - 12$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Una vez que lo conseguimos, tenemos que factorizar el primer término. Obtenemos la factorización, que es

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

Ahora, para que esa igualdad sea cierta, el primer término o el segundo tienen que ser igual a 0. Si el primer término es igual a 0, obtenemos el siguiente valor

$$x - 3 = 0$$

$$x - 3 + 3 = 3$$

$$x = 3$$

Si el segundo lo es obtenemos

$$x + 4 = 0$$

$$x + 4 - 4 = -4$$

$$x = -4$$

Así, las soluciones de esta ecuación son $x = 3$ y $x = -4$.

Enlaces interesantes:

https://www.youtube.com/watch?v=PTJx4W-lQbE

https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación_de_segundo_grado#Soluciones_de_la_ecuación_de_segundo_grado

- <u>Método ¿fácil?: Fórmula General</u>

Si fuiste lo suficientemente curioso y leíste el artículo de Wikipedia, te habrás dado cuenta de que existe algo así como una fórmula mágica con la que se puede resolver (o al menos intentar) cualquier ecuación de segundo grado que nos encontremos por ahí. Desde luego que no se trata de magia, e incluso sería interesante que trataras de demostrar por qué funciona, y se le conoce como formula general. Se ve así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Antes de utilizarla, hay que entender que representa cada letra. La x es la incógnita presente en nuestra ecuación. El símbolo de $\pm$ representa las dos soluciones que podría tener nuestra ecuación: para obtener una sumaremos la raíz, y para la otra la restaremos. Cada una de las letras a, b y c, se tratan de los coeficientes que acompañan a los tres términos básicos de una ecuación cuadrática, que son los siguientes:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La a es el coeficiente que acompaña al término que está al cuadrado, la b es el que acompaña al término que tiene a la incógnita elevada a la 1, y la c es el valor que no tiene incógnita. Como puedes darte cuenta, estas ecuaciones también tienen que ser igualadas a 0 para usar la fórmula general.

Consideremos el siguiente ejemplo: $x^2 - 7x = -5$. Primero dejamos en 0 el segundo término de la expresión. Nos queda así:

$$x^2 - 7x + 5 = -5 + 5$$

$$x^2 - 7x + 5 = 0$$

Ahora, identificamos el valor de a, b y c en la expresión, recordando que a es el coeficiente que acompaña al término que está al cuadrado, la b es el que acompaña al término que tiene a la incógnita elevada a la 1, y la c es el valor que no tiene incógnita.

Así, $a = 1, b = -7$ y $c = 5$. Observa que hay que considerar el signo que tiene cada coeficiente. Ya, por último, metemos estos valores en la fórmula y hacemos la manipulación correspondiente.

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Llegado a este punto, realizamos las dos manipulaciones, la de suma y la de resta

$$x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x \approx 6.1925$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x \approx 0.8074$$

Y obtenemos las dos soluciones, $x = \frac{7+\sqrt{29}}{2}, x = \frac{7-\sqrt{29}}{2}$.

Video: https://www.youtube.com/watch?v=sdWh5CnYIX4

Sistemas de ecuaciones

Bueno, y ¿qué es lo que sucede cuando tenemos que obtener el valor de dos o más incógnitas? En ese caso estaremos frente a un sistema de ecuaciones. Para que pueda ser resoluble, tendremos que contar con una ecuación por cada variable que se nos presente. De esta manera, si tenemos que hallar dos variables, debemos tener dos ecuaciones, si tenemos tres variables, son tres las ecuaciones necesarias.

Existen diversos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones, unos más efectivos que otros, y es por ello que presentaremos solo algunos. Algunos solo funcionaran en sistemas de ecuaciones de 2x2 (esto es, 2 incógnitas y 2 ecuaciones), y es importante estudiarlos porque son los sistemas de ecuaciones que nos toparemos con mayor frecuencia.

- Sistemas de ecuaciones de 2x2: Método de suma y resta

Podemos distinguir una serie de pasos para llevar a cabo este método

a) Se multiplican los miembros de una o de las dos ecuaciones por una cantidad constante apropiada para obtener ecuaciones equivalentes que tengan igual coeficiente para una de las incógnitas.
b) Por suma o resta se elimina una de las incógnitas.
c) Se resuelve la ecuación lineal resultante.
d) Se sustituye el valor determinado en cualquiera de las ecuaciones originales para, encontrar el valor de la otra incógnita.

Observemos el siguiente ejemplo

1. Resolver el sistema

$$\textbf{(1)}\ 4x + 6y = -3$$
$$\textbf{(2)}\ 5x + 7y = -2$$

Multiplicar los miembros de la ecuación **(1)** por 5 y los de la ecuación **(2)** por -4; resultando que los coeficientes de "x" se igualan y son de signo contrario.

$$5(4x + 6y = -3) \qquad 20x + 30y = -15$$
$$-4(5x + 7y = -2) \qquad -20x - 28y = 8$$

Sumando algebraicamente ambas ecuaciones, resulta:

$$\begin{array}{rrl} & 20x + 30y = & -15 \\ \underline{-} & \underline{20x - 28y =} & \underline{\ \ 8} \\ 0 & 2y = & -7 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos: $\mathbf{y = -7/2}$

Sustituyendo el valor determinado en cualquiera de las ecuaciones originales, se obtiene:

$$\textbf{(1)}\quad 4x + 6(-7/2) = -3$$
$$4x - 21 = -3$$
$$4x = -3 + 21$$
$$x = 18 / 4$$
$$\mathbf{x = 9/2}$$

$$\textbf{(2)}\quad 5(9/2) + 7(-7/2) = -2$$
$$45/2 - 49/2 = -$$
$$-4/2 = -2$$
$$-2 = -2$$

Su comprobación es:

$$4(9/2) + 6(-7/2) = -3$$
$$18-21 = -3$$
$$\underline{-3 = -3}$$

Por lo tanto los valores que satisfacen al sistema son:
$\mathbf{x = 9/2}$ y $\mathbf{y = -7/2}$

Video de apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=7dos7zJQevs

- Sistema de ecuaciones de 2x2: Método de sustitución

En pocas palabras, consiste en esoger una de las ecuaciones del sistema y despejar una de las incógnitas. Después sustituiremos este valor en la otra ecuación que, al tener ahora solo una variable, la podremos obtener con facilidad. Por último, sustituimos el valor de la incógnita que ya conocemos en alguna de las ecuaciones y despejamos la que nos faltaba encontrar.

El ejemplo es el siguiente

$$\begin{cases} 3x & +y & = & 22 \\ 4x & -3y & = & -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita y por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita y en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x.

$$4x-3(22-3x) = -1 \qquad \Rightarrow 4x-66+9x = -1$$

$$\Rightarrow 13x-66 = -1, \qquad \Rightarrow 13x = 65$$

Al resolver la ecuación obtenemos el resultado $x = 5$, y si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales obtendremos $y = 7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

Video interesante: https://www.youtube.com/watch?v=3FHhPLVUt9o

Desde luego que existen otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones, y aquí los puedes encontrar: http://www.wikillerato.org/Métodos_de_resolución_de_sistemas_de_ecuaciones_lineales.html

La idea es que pruebes cada método y encuentres el que te resulte más cómodo.

- Sistemas de ecuaciones 3x3 (y en general NxN): "Tanteo" o Suma y Resta

Una de las formas "fáciles" pero no siempre efectivas de resolver sistemas más grandes es utilizando el método de suma o resta. Es cosa de ir eliminando ecuación por variable por variable, o tantearle por si fuese más fácil sumar o restar todas las ecuaciones.

Existen más métodos, y si quieres conocerlos te invito a que los investigues por tu cuenta.

Fuentes de consulta (también de los problemas):

http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A2_Sistemas.pdf

http://ommags.com/new/wp-content/uploads/2017/06/10-Junio-ManipulaciónAlgebraica-Álgebra.pdf http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/CursoEntrenadores2014.pdf

https://sites.google.com/site/algebrasistemas/definicion

https://sites.google.com/site/algebrasistemas/conceptos