Solución de Ecuaciones Cúbicas Generales

David G. Torres Flores

Noviembre 2019

Considere una ecuación cúbica en forma general:

$$au^3 + bu^2 + cu + d = 0.$$

A lo largo de este breve texto, ilustraremos cómo encontrar una solución exacta y explícita para dicha expresión. Nuestra solución será siempre un número real, aunque en algunos casos deberemos usar los números complejos para calcularla. Procedemos como sigue: En primer lugar, dividiendo por el coeficiente principal si hace falta, es sencillo transformar la ecuación anterior en la ecuación

$$u^3 + \left(\frac{b}{a}\right) u^2 + \left(\frac{c}{a}\right) u + \left(\frac{d}{a}\right) = 0.$$

Renombrando $b' = \frac{b}{a}$, $c' = \frac{c}{a}$, y $d' = \frac{d}{a}$, podemos escribir esta ecuación como

$$u^3 + b'u^2 + c'u + d' = 0.$$

La ecuación anterior tiene las mismas soluciones que la ecuación original. Procedemos ahora a realizar la sustitución $u = x - \frac{b}{3}$. Esta sustitución traslada las soluciones $\frac{b}{3}$ unidades a la derecha (si $b < 0$, la traslada a la izquierda $\left|\frac{b}{3}\right|$ unidades). Observamos que al desarrollar la ecuación anterior, obtendremos una ecuación de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Nótese que dicha ecuación carece de término cuadrático. Esta forma se llama la *forma reducida* de la ecuación cúbica original. Como acabamos de ver, cualquier ecuación puede transformarse en su forma reducida mediante una simple traslación. Hecho esto, consideraremos la ecuación cuadrática

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

A esta ecuación le llamaremos la *ecuación cuadrática asociada* a la forma reducida. El cómo obtuvimos esta ecuación será discutido más adelante. Por lo pronto, es suficiente saber que si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática asociada, entonces $x_1 = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$ es una solución de la ecuación original.

Además, el signo del discriminante, que en este caso es equivalente al signo de $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ de esta última ecuación nos dice cuántas soluciones reales tiene nuestra ecuación original. Si $\Delta = 0$ nuestra ecuación tiene dos soluciones reales. Si $\Delta > 0$ nuestra ecuación tiene una solución real, y si $\Delta < 0$ nuestra ecuación tiene tres soluciones reales.

Veamos ahora la resolución de un problema completo, desde el inicio. Resolvamos la ecuación

$$2u^3 - 6u^2 + 18u - 18 = 0.$$

$$\begin{aligned} 2u^3 - 6u^2 + 18u - 18 &= 0 \\ u^3 - 3u^2 + 9u - 9 &= 0 \\ \text{Tomamos } u = x - \frac{-3}{3} &= x - 1 \\ (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 9(x-1) - 9 &= 0 \\ x^3 + 6x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Consideramos entonces la ecuación cuadrática asociada:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z - \left(\frac{6}{3}\right)^3 &= 0 \\ z_1 &= 4, z_2 = -2 \\ x_1 &= \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} \\ x_1 &= \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\ u_1 &= 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u_1 = 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ es una solución de la ecuación cúbica $2u^3 - 6u^2 + 18u - 18 = 0$.
Para practicar, resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 - 3x + 3x + 7 = 0.$
2. $x^3 - 9x + 6 = 0.$