SUCESIONES

Ricardo Antonio Gutiérrez Esparza
Contacto: 0226154@up.edu.mx

1. Sucesiones

Probablemente hayas escuchado esa palabra en algún punto de tu educación primaria o secundaria. Si es así, seguramente recuerdas haber visto dibujos de este tipo en algún libro de texto (de matemáticas, evidentemente), y probablemente sea el único acercamiento que tengas a la definición de una sucesión[1].

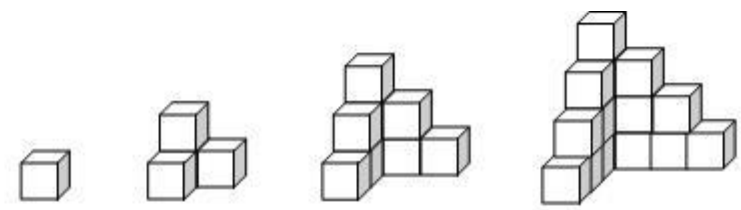

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Como posiblemente ya te diste cuenta, aquí en la OMM nos gusta complicar las cosas dando definiciones formales a cosas tan simples como ésta, pero es algo necesario. No te preocupes, que te va a quedar muy claro al terminar este material.

> **Definición**: Una sucesión de números es una *función* que asigna a cada entero positivo un número distinto. El número asignado por la sucesión al entero n es comúnmente denotado con un subíndice, por ejemplo a_n. Estos números son llamados los *términos* de la sucesión. Puedes pensar en las sucesiones como listas de números.

Si no sabes lo que es una función, no te preocupes (por ahora). Puedes pensar en una función como una caja misteriosa a la que le das un número x, le hace algo y te regresar otro número y.

Considera la siguiente sucesión:

$$1, 5, 9, \dots$$

Aquí tenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, y en general $a_n = 4n - 3$. (Analizando las sucesiones como funciones tenemos que los números x que le das son los

---

[1] A veces se les suele llamar progresiones o secuencias, para que lo tomes en cuenta.

naturales: 1,2,3, …; lo que les hace es multiplicarlos por 4 y restarles 3, y el número y que te regresa es la sucesión como tal: 1, 5, 9, …)

En este rollo de las olimpiadas hay dos tipos de sucesiones que nos llaman especialmente la atención. Las revisaremos a continuación.

2. Sucesiones aritméticas

> **Definición:** Una sucesión aritmética es una sucesión o colección de números de tal manera que cada uno de los términos de la sucesión se puede obtener del anterior sumando una cantidad fija. En términos más formales, tenemos que $a_n = a + (n-1)d$, para a, d constantes y $d \neq 0$. El número a es el primer término de la sucesión (de manera que $a_1 = a$) y d es la cantidad fija de la que hablábamos, también llamada **diferencia de la sucesión**.

Si recordamos la sucesión que ya habíamos visto $(1, 5, 9, \ldots)$, resulta que es una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 4$. Otra sucesión aritmética común es la de los números naturales $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, en la que $a = 1$ y $d = 1$.

Ejercicio: encuentra los valores de a y d para cada sucesión aritmética mostrada:

a) 2, 7, 12, …
b) 10, 7, 4, …
c) -4, -2, 0, …

Algunas propiedades:

a) El término a_n es igual a $a_1 + (n-1)d$, para $n = 1, 2, \ldots$
b) $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
c) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\ para\ n = 2, 3, \ldots$

Resulta especialmente interesante la *propiedad b)*, pues se trata de la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética, con la que podemos obtener otras sumas, que tendrás que demostrar más adelante:

- Suma de los primeros n pares: $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$
- Suma de los primeros n impares: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Sobre esta propiedad, me gustaría contarte un pequeño cuento. Resulta que un día el maestro de Carlos se enojó con sus alumnos porque no le estaban poniendo atención. A manera de castigo, les dijo que no los dejaría irse hasta que sumaran todos los números del 1 al 100. Carlos, que era igual de inteligente que tú, decidió hacer lo siguiente:

Aunque podría parecer aparatosa un truco muy sencillo la resuelve. Acomodemos los términos de manera inteligente y sumemos:

S	=	1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100
S	=	100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1
2S	=	101	+	101	+	101	+	...	+	101	+	101	+	101

Como el número 101 se está sumando 100 veces, luego $2S = 101 \cdot 100$, que implica $S = \frac{101 \cdot 100}{2}$. Nada especial tiene el número 100, de hecho:

S	$=$	1	$+$	2	$+$	...	$+$	$(n-1)$	$+$	n
S	$=$	n	$+$	$(n-1)$	$+$	...	$+$	2	$+$	1
$2S$	$=$	$(n+1)$	$+$	$(n+1)$	$+$	...	$+$	$(n+1)$	$+$	$(n+1)$

Finalmente, notemos que el número $n+1$ se está sumando n veces, por lo que $2S = (n+1) \cdot (n)$, que implica $S = \frac{(n+1)\cdot(n)}{2}$.

En este caso, tú ya sabes que como los números del 1 al 100 forman una sucesión aritmética con la $a = 1$ y $d = 1$ puedes calcular esa suma con la *propiedad b)*, pero la idea se puede adaptar para demostrar por qué la propiedad funciona. Te invito a que intentes hacerlo.

3. Sucesiones geométricas

Definición: Una sucesión geométrica es una sucesión de números relacionados de tal manera que cada uno se puede obtener de anterior multiplicando a éste por una cantidad fija llamada razón común o **razón de la sucesión** (denotada por r). La sucesión $\{a_n\}$ es geométrica si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ es una constante para $n \geq 1$. Sabiendo esto, podemos decir que cada término se define como $a_n = a * r^{n-1}$, con $r \neq 0{,}1$. Aquí nuevamente a es una constante y coincide que $a_1 = a$.

La sucesión $2, 6, 18, 54$ ... es geométrica, con $a = 2$ y $r = 3$. La sucesión $1, 2, 4,$ ... también es geométrica, con $a = 1$ y $r = 2$.

Ejercicio: encuentra los valores de a y r para cada sucesión geométrica mostrada:

1. 3, 12, 48 …
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ...
3. 5, -65, 845, …

Algunas propiedades

a) El término $a_n = a_1 r^{(n-1)}$, para $n = 1, 2, ...$
b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ para $n = 1, 2, ...$
c) Si los términos son positivos, se tiene que $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, para $n = 2, 3, ...$

Vamos a demostrar la *propiedad b)*:

Denotamos S_n como la suma de los primeros n términos. Entonces, tenemos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n$$

Usando la *propiedad a)*:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n \ = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Multiplicamos todo por r y tenemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots ar^n$$

Recordando que $S_n \ = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$, restamos S_n y rS_n y nos queda:

$$S_n - rS_n = a + ar - ar + ar^2 - ar^2 + \cdots + ar^n = a - ar^n$$

Cuando despejamos S_n obtenemos:

$$S_n(1-r) = a - ar^n \rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

4. Datos de vital importancia

[Inserta una frase creativa]

1. El ocelote fue adorado por los moches de Perú. https://www.mexicodesconocido.com.mx/ocelote-el-gato-mexicano.html
2. Johann Friedrich Carl Gauss, dejó de lado su primer nombre y cambió el orden de los siguientes, quedando Carl Friedrich Gauss, conocido también como Príncipe de la Matemática por sus múltiples aportaciones en diferentes áreas de esta. https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

5. Los agregados culturales

Además de estas sucesiones, existen las **sucesiones recursivas**, en la cual el término a_n está definido con base en los términos anteriores $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$.

El ejemplo más común de una sucesión recursiva es la sucesión de Fibonacci, en la que cada término de la sucesión a_n, con $n > 1$, se obtiene sumando los dos anteriores:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ f_1 = 0,\ f_2 = 1$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son $0,1,1,2,3,5,8,13, \dots$

De igual forma se presentan **otras sumas** que resultan útiles:

- Suma de los primeros n cuadrados: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Suma de los primeros n cubos: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Por el momento las tomaremos por ciertas, ya más adelante tendrás que demostrarlas.

6. Problemas

1. Demostrar la *propiedad c* de las sucesiones aritméticas y geométricas.
2. Evalúa 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + … + 195 + 199 + 203
3. a, b, c, d, e forman una progresión aritmética con suma 100, encuentra c.
4. Encuentra el término 100 de 1, 5, 10, 16, 23, 31, …
5. Evalúa 31 + 32 + 33 + … + 399
6. a, b, c, d, e forman una progresión geométrica con producto 243, encuentra c.
7. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión geométrica, ¿Cuál es la razón de la progresión?
8. Calcula el valor de la siguiente suma 99 − 97 + 95 − 93 + · · · + 3 − 1.
9. ¿Para qué entero positivo n se satisface la ecuación siguiente? $\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}=\frac{2006}{2007}$
10. Encontrar la suma de todos los números de tres cifras en cuyos dígitos son un subconjunto de {1, 2, 3, 4} en algún orden.
11. Calcular $2018^2-2017^2+2016^2-2015^2+\cdots+4^2-3^2+2^2-1^2$
12. Raúl leyó un libro. El primer día leyó 30 páginas y cada día siguiente leyó 6 páginas más que el día anterior. Si la lectura le llevó 100 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?
13. (2002 AMC 12B) La suma de 18 enteros consecutivos es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar esta suma?
14. (1981 AHSME) En una secuencia geométrica de números reales, la suma de los primeros dos términos es 7 y la suma de los primeros seis términos es 91. ¿Cuál es la suma de los primeros cuatro términos?
15. (2004 AMC 10A) Sea $a_1, a_2, \ldots$ una secuencia con las siguientes propiedades:
    - $a_1=1$, y
    - $a_{2n}=n*a_n$ para cualquier entero positivo n

    ¿Cuál es el valor de $a_{2^{100}}$?

16. Prueba que el número: $2^{2005} + 4^{2005} + \cdots + 2006^{2005}$ es múltiplo del número $2 + 4 + 6 + \cdots + 2006$
17. (Eslovenia, 2009) Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética no constante con término inicial $a_1 = 1$. Suponga que los términos $a_2, a_5\ y\ a_{11}$ forman una progresión geométrica. Encuentre la suma de los primeros 2009 términos.
18. Los números a, b, c, d están en progresión aritmética (en ese orden). Demostrar que
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$$
19. (ONMAPS, 2016) Un duende tiene un saco mágico del que puede sacar cualquier cantidad de monedas que desee. Un día, forma n montones de monedas, cada uno con solo 1 moneda. A continuación, procede a realizar la siguiente operación de forma repetida: Primero escoge dos montones y las junta en uno solo; luego saca tantas monedas de la bolsa como la cantidad de montones que no fueron escogidos, y las añade al nuevo montón que formó. Este proceso lo repite hasta que quede solo un montón con monedas. Encuentra todos los posibles valores de n para los cuales, al final de proceso, el último montón tiene 2016 monedas.

7. Videos

- Sucesiones aritméticas (explicadas un poco distinto): https://www.youtube.com/watch?v=W0bkKBR0Q_I
- Sucesiones geométricas: https://www.youtube.com/watch?v=cmAkW6xpZxo
- Charla interesante sobre la sucesión de Fibonacci: https://www.youtube.com/watch?v=SjSHVDfXHQ4
- Un poco de música: https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ

La información presentada en este material es una recopilación de varias fuentes, siendo la principal: Paquin, D. (2008) *Educational Program for Gifted Youth: Math Olympiad Problem Solving*. Stanford University.