Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 5

Sumas Telescópicas

Una suma telescópica es un tipo de suma que tiene una característica que hace que sea sencilla de evaluar. Cuando tenemos una suma de la siguiente manera $\sum_{k=1}^{n}[f(\mathrm{k}+1)-f(k)]$ se puede desarrollar así

$$\sum_{k=1}^{n}[f(\mathrm{k}+1)-f(k)]=f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+\cdots+f(n+1)-f(n)$$

Entonces, los términos $f(k)$ para $2\leq k\leq n$ se cancelan, quedando como resultado de la suma $f(n+1)-f(1)$. Esto es una suma telescópica, y es una idea interesante que vale la pena estudiar, porque este razonamiento se puede extender para la resolución de otros problemas.

Si te parece que este tema es demasiado fácil es porque hay un detalle que falta mencionar. En la mayoría de las ocasiones, la suma que deberemos de efectuar no se nos presentará de forma evidente, por lo que será necesario realizar manipulaciones algebraicas en la expresión dada para poder evaluarla por este simple método, y es aquí donde se pone interesante. Veamos un ejemplo.

Tratemos de evaluar la suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Esto no se parece a una telescópica (y es porque desde luego que no lo es), sin embargo, hay que notar que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Sabiendo esto, podemos sustituir la expresión cambiada en la suma y nos queda de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Luego tenemos varios términos que se van a cancelar, resultando en lo siguiente

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

De esta manera, la solución de la suma es $\frac{n}{n+1}$.

El paso de transformar la suma dada en una telescópica es la parte interesante de resolver este tipo de problemas, y te será de gran ayuda que tengas la suficiente práctica con la manipulación algebraica.

Antes de terminar con el que posiblemente es el material más corto de este taller de Álgebra, vale la pena saber que esta idea se puede aplicar también con las multiplicaciones, pues si tenemos un producto como este $\prod_{k=1}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}$, puede ser evaluado de la siguiente manera. Por cierto, el símbolo que se muestra (Π) es la letra griega pi, pero en mayúscula.

Se utiliza para representar un producto de la misma manera que la sigma mayúscula (Σ) sirve para representar una suma. Volviendo a la explicación:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{f(2)}{f(1)}\times\frac{f(3)}{f(2)}\times\frac{f(4)}{f(3)}\times\ldots\times\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(n+1)}{f(1)}$$

Ojo que aquí hay que asegurarnos que cada $f(k)$ (salvo $f(n+1)$ quizá) sea diferente de 0, pues de otra forma tendríamos que dividir entre 0, operación que no está determinada.

Aplicar esto sería, por ejemplo, para evaluar el producto $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Hay que notar que $1-\frac{1}{k}=\frac{k}{k}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$, de forma que el producto nos queda así

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

Resultando en $\frac{1}{n}$.

Pregunta rápida: ¿Qué pasaría si el límite inferior de nuestra suma, en vez de ser $k=2$ fuera $k=1$? ¿Y si es $k=0$?

Ahora lo único que resta es practicar esta técnica.

Links de consulta (también de los problemas)

http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/2019/03/Tzaloa_1_2018.pdf

https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_telescópica

Bulajich, R., Gómez, J. & Valdez, R. (2016) *Álgebra (3ª Edición).* UNAM. pp. 46-48.