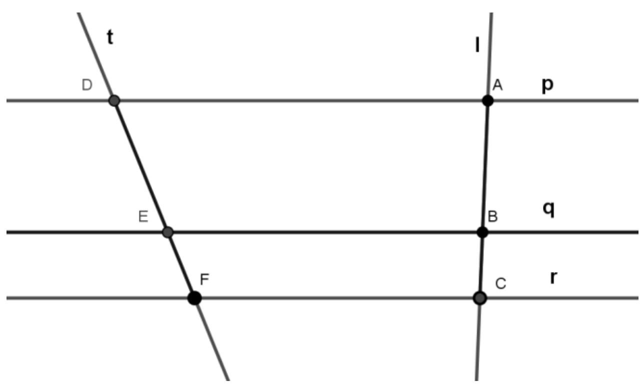
TALES Y SEMEJANZA

Laura Soledad Casillas Serna

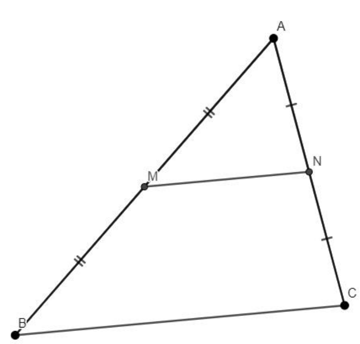
1. Teorema de Tales

Si una línea transversal corta a tres rectas paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón $m: n$, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón $m: n$.

Por ejemplo, sean p, q, r, tres rectas paralelas. Si una línea l corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que $AB: BC = 2: 1$, y otra línea t corta a las rectas paralelas en D, E y F, también tendremos que $DE: EF = 2: 1$ (las relaciones $a: b = c: d$ también se pueden ver como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$).



También el recíproco del teorema de Tales es aplicado a triángulos para demostrar segmentos paralelos. Por ejemplo, si en el triángulo ΔABC M y N son los puntos medios de los lados AB y AC, tenemos que $AM: NB = AN: NC = 1: 1$, y por el teorema de Tales decimos que MN es paralelo a BC, esto también se expresa como $MN \parallel BC$.



Demostraciones

Vamos a probar que una recta es paralela a un lado de un triángulo si y sólo si parte a los otros dos lados en la misma proporción.

Primero trataremos de probar que en un triángulo ΔABC, la recta DE paralela a BC, cortará a los lados AB y AC en la misma proporción. Para esto tendremos que resolver los siguientes lemas sobre áreas de triángulos:

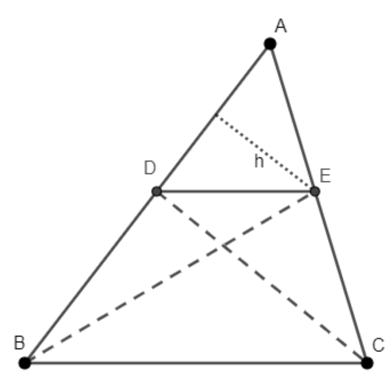
Primer lema: *Si dos triángulos tienen una misma altura, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura común.*

Para demostrarlo supongamos que tenemos dos triángulos ΔABC y ΔDEF, con áreas $(ABC) = \frac{BC*h}{2}$ y $(DEF) = \frac{EF*h}{2}$. Entonces la razón de sus áreas será $\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{2BC*h}{2EF*h} = \frac{BC}{EF}$, que es lo que se quería demostrar.

Segundo lema: *Si dos triángulos tienen una base igual, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual.*

Se puede demostrar de una forma parecida al anterior. Supongamos que tenemos dos triángulos ΔABC y ΔDEF, con $AB = DE$ y alturas h_1 y h_2, respectivamente. Entonces $(ABC) = \frac{h_1 AB}{2}$ y $(DEF) = \frac{h_2 DE}{2}$. Al dividir las dos ecuaciones tendríamos $\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{2h_1 AB}{2h_2 DE}$, reduciendo quedaría $\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{h_1}{h2}$ que es justo lo que dice el lema.

Continuando con el teorema de Tales en triángulos, si tenemos un triángulo ΔABC y una recta DE paralela a la base.



Observando los triángulos ΔABE y ΔADE se puede ver que tienen la misma altura desde el vértice E. Usando el lema anterior se llega a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{(ABE)}{(ADE)} \quad (1)$$

De la misma forma, al ver los triángulos ADC y ADE, tenemos que

$$\frac{AC}{AE} = \frac{(ADC)}{(ADE)} \quad (2)$$

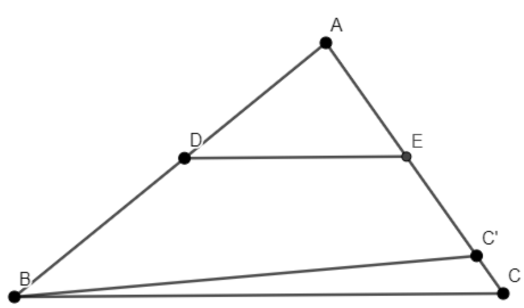
Considerando los triángulos DEB y DEC que tienen a DE como base común; y como DE es paralela a BC, es fácil ver que las alturas de los triángulos, desde DE, miden lo mismo. Por el segundo lema se tendría que $\frac{(DEB)}{(DEC)} = 1$, entonces $(DEB) = (DEC)$. Por lo tanto $(ABE) = (ADE) + (DEB) = (ADE) + (DEC) = (ADC)$.

Al dividir (1) entre (2), tendríamos que $\frac{AB*AE}{AD*AC} = \frac{(ABE)*(ADE)}{(ADE)*(ADC)} = 1$. Así llegamos a que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ que es lo mismo que el teorema de Tales.

Se pueden deducir otras fórmulas para el teorema de Tales a partir de $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Con lo anterior ya llevamos la mitad del camino, ahora falta ver que si una recta parte a dos lados de un triángulo en la misma proporción $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, la recta será paralela al lado faltante del triángulo; esto para probar el "si y sólo si". Para esto trataremos de probar lo contrario, que DE no es paralela a BC. Trazando la recta BC' tal que sea paralela a DE e intersecte a AC en C'. Por la demostración anterior tenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$$

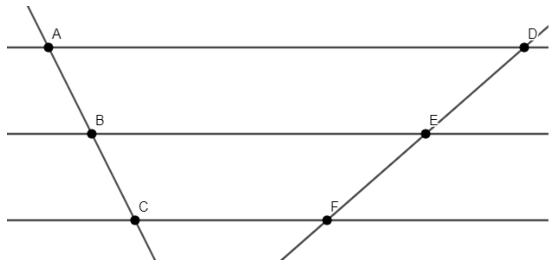


Usando que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ y $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$, tenemos que

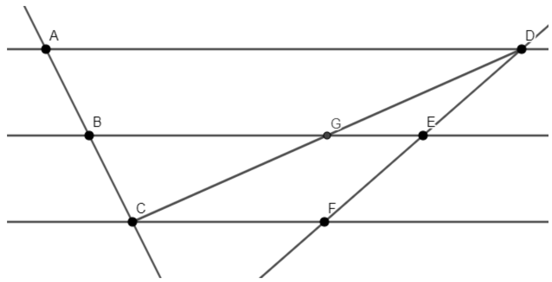
$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

Multiplicando por AE tendremos que $AC' = AC$ y la única forma de que esto sea posible es que el punto C sea el mismo que C'. Por lo tanto, si una recta parte a dos lados de un triángulo en la misma proporción, la recta será paralela al lado faltante del triángulo, en este caso $DE \parallel BC$.

Ahora falta demostrar el teorema de Tales con tres rectas paralelas y dos rectas que las intersecten



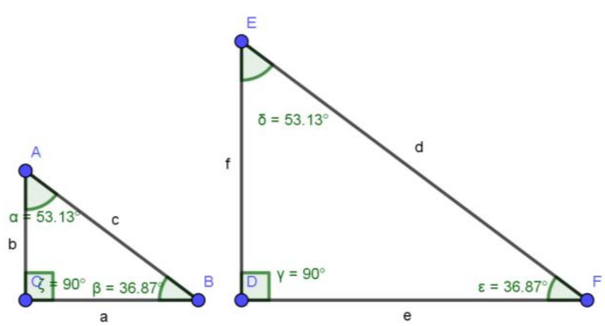
Trazando la recta CD



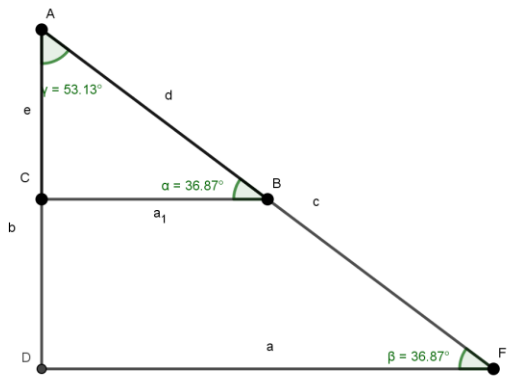
Observando el triángulo ΔACD, por las demostraciones anteriores, se tiene que $\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GC}$. Viendo el triángulo CDE, $\frac{DG}{GC} = \frac{DE}{EF}$. Juntando las ecuaciones tendremos que $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{EF}$, lo que nos dice que las rectas paralelas cortan a las rectas AC y DF en la misma proporción.

2. Semejanza

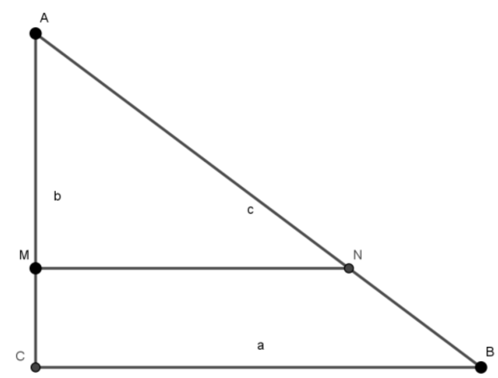
Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma (aunque no necesariamente el mismo tamaño), es decir, si tienen sus tres ángulos iguales; por ejemplo: Los triángulos ∆ABC y ∆EFD son semejantes.



Si nosotros movemos el triángulo ∆ABC hasta que el vértice A coincida con el vértice E, y además, lo hacemos de tal manera que el lado AB quede exactamente encima del lado DF, tendremos la siguiente figura:



Aquí podemos observar que los lados BC y DF son paralelos, y de manera inversa, si nosotros trazamos una línea paralela a uno de los lados de un triángulo de manera que ésta corte a los dos lados restantes, entonces esta línea paralela cortará un triángulo semejante al triángulo original.



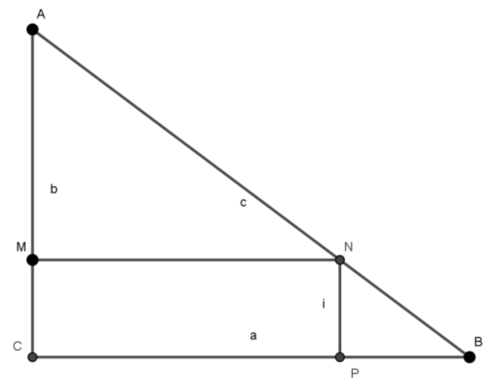
Utilizando lo anterior y el Teorema de Tales, tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BN}{NA}$$

Sumando 1 en ambos lados tenemos:

$$\frac{CM}{MA} + 1 = \frac{BN}{NA} + 1 \quad \Rightarrow \frac{CM+MA}{MA} = \frac{BN+NA}{NA} \quad \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} \qquad (3)$$

además, si trazamos una paralela a AC, la cual pase por el punto N, tendremos un paralelogramo $MNPC$ (un paralelogramo es un cuadrilátero en el que cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud).



Utilizando nuevamente el Teorema de Tales tenemos que:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BN}{NA}$$

Nuevamente sumamos 1 en ambos lados y obtenemos que:

$$\frac{BC}{PC} = \frac{AB}{NA}$$

Pero como PC = NM, tenemos:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN} \qquad (4)$$

Juntando los resultados de (3) y (4) tenemos:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN}$$

Es decir, si dos triángulos son semejantes entonces sus lados son proporcionales.

Existen 3 criterios para saber si dos triángulos son semejantes:

- **AA**: 2 de los 3 ángulos correspondientes son iguales.
- **LAL**: Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que forman ese ángulo son proporcionales.
- **LLL**: Los 3 lados correspondientes son proporcionales.

3. Datos de vital importancia

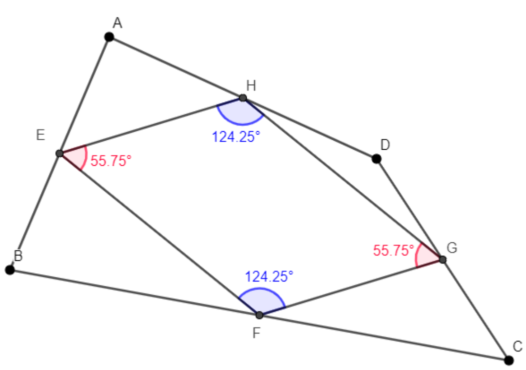
Antes de continuar revisa los siguientes datos

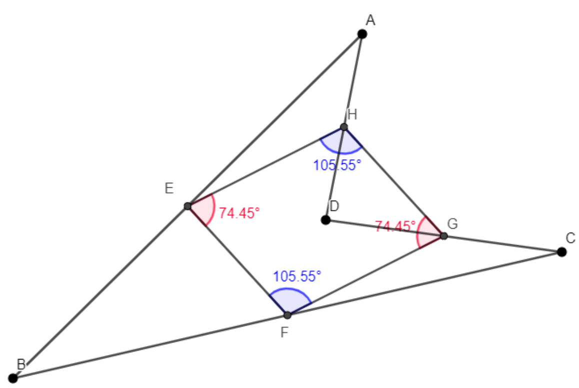
1. Para los griegos, la música representaba la unión entre el mundo idealizado de las matemáticas y el mundo físico de la experiencia, la bisagra perceptible entre la aritmética y la geometría.
   https://culturacientifica.com/2014/10/03/la-musica-de-las-esferas/

2. El pintor surrealista Salvador Dalí tenía un ocelote como mascota, se llamaba Babbou, lo adquirió gracias a un gobernante colombiano y solía llevarlo consigo a todas partes, incluyendo sus viajes de lujo. https://www.mexicodesconocido.com.mx/ocelote-el-gato-mexicano.html
3. Si no entiendes que tienen que ver los ocelotes con las matemáticas es porque todavía no has visitado nuestra página de Facebook. https://www.facebook.com/OlimpiadaMatematicasAGS/

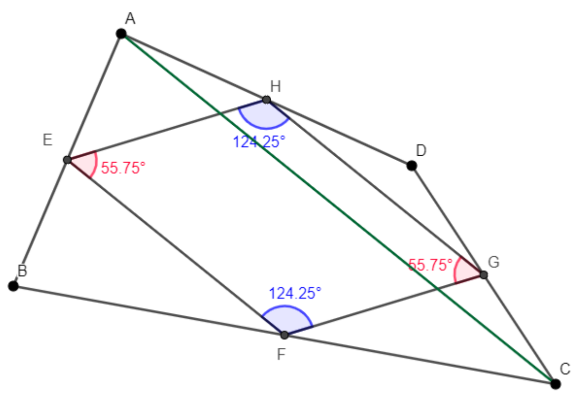
4. Varignon

El teorema de Varignon dice que si tienes un cuadrilátero ABCD cualquiera y marcas los puntos medios de cada lado E, F, G y H, el cuadrilátero EFGH será un paralelogramo.





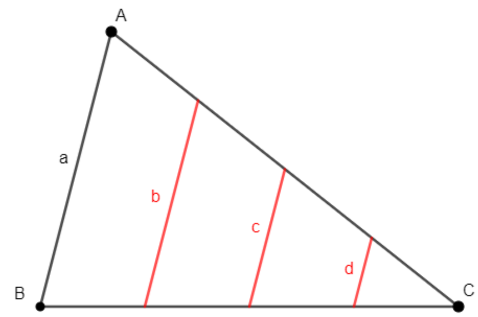
Para demostrarlo trazaremos la diagonal AC, como AE=EB y CF=FB, entonces $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}$, por lo tanto $EF \parallel AC$. Ahora del otro lado, como AH=HD y CG=GD, entonces $\frac{AH}{HD} = \frac{CG}{GD}$, por lo tanto $HG \parallel AC$. Así se puede ver que $EF \parallel HG$. Trazando la diagonal BD se puede usar el mismo procedimiento para ver que $EH \parallel FG$. Y así ya quedó demostrado que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo, sin importar que tipo de cuadrilátero sea ABCD.



5. Problemas

PRECAUCIÓN: Para casi todos los problemas es necesario demostrar alguna propiedad de la figura que se especifique, así que es importante que hagas las soluciones en hojas separadas, con el mayor orden posible y escribiendo todo el procedimiento. Si tienes dudas sobre cómo escribir las soluciones, pregúntale a tu asesor, ellos viven para contestar tus dudas.

1. Sobre el teorema de Varignon:
    a. Demuestra que el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las diagonales.
    b. Demuestra que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero.
2. En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado BC en 4 segmentos iguales. Si $a = 10$, encuentra la suma $a + b + c + d$.



3. Demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo miden lo mismo.
4. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.
5. Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que AB=CH. Determina el valor del ángulo < BCA.
6. Demuestra que, si ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en B y sea H el pie de la perpendicular desde B sobre AC, entonces $BH^2 = AH \cdot CH$.
7. Sea ABC un triángulo rectángulo con <C=90°. Sea M un punto sobre BC tal que AM es bisectriz del <BAC, y sea N el pie de la altura trazada desde M hacia AB. Demuestra que CM = MN.
8. Sea ABC un triángulo con AC=AB. Sea M un punto sobre AC, y N un punto sobre AB, tales que AM=AN. Supongamos que CN y BM se intersecan en P. Demuestra que BM=CN y que PC=PB.
9. Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo ABC (las medianas son las líneas que van de un vértice de un triángulo, al punto medio del lado opuesto). Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero ABNC es paralelogramo.

10. Sea ABCD un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros ABF y ADE, respectivamente. Demuestra que el triángulo FCE es equilátero.
11. Sea F el pie de la altura del vértice C del triángulo ABC. Sea G un punto sobre la prolongación de la altura BE, de manera que GE = CF. Sea H el punto sobre la prolongación de AB, de forma que GH es paralela AC. Demuestra que triángulo ACH es isósceles.
12. En el paralelogramo ABCD, los puntos E y F se escogen en la diagonal AC tales que AE=CF. Si BE se extiende para cortar AD en H, BF se extiende para cortar DC en G, demuestre que HG es paralela a AC.
13. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en B y AB<BC. La bisectriz del ángulo ABC tomamos el punto P tal que AP es perpendicular a dicha bisectriz. Sea M el punto medio de AC, y E la intersección de MP con el cateto AB. Si EM= 15cm, ¿cuánto mide BC?
14. Sea ABCD un cuadrilátero convexo con <ADC=<BCD>90°. Sea F el punto de intersección de BD con la paralela a BC por A y sea E el punto de intersección de AC con la paralela de AD por B. Demostrar que EF y CD son paralelas
15. Sea ABC un triángulo cualquiera y sean E y F puntos sobre los segmentos AC y AB, respectivamente. Sean L, M y N los puntos medios de los segmentos BE, EF y FC, respectivamente. Demuestra que <BAC=<LMN.
16. Sobre los catetos AC y BC del triángulo rectángulo ABC se construyen, afuera del triángulo, los cuadrados AKLC y BMNC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares a AB trazadas desde K y desde M respectivamente. Prueba que KP+MQ=AB.

6. Vídeos

Demostración del teorema de Tales (y Pitágoras) con áreas

https://youtu.be/8HCLyjpr6GY

Semejanza y teorema de Tales

https://youtu.be/JGyYSzhCxFA