Teorema de Pitágoras y Áreas

Entrenamiento #5 para 4ª etapa
15-17 de julio de 2016
Por: Lulú

Resumen

Bienvenidos sean de nuevo a Geometría, el área con mayor cantidad de temas en la Olimpiada. En esta ocasión les vengo a hablar de unas de las herramientas más descuidadas, pero más conocidas. Desde la primaria sabemos calcular áreas y desde la secundaria conocemos el Teorema de Pitágoras; así que no olvidemos que los sabemos y démosles uso.

1. Primero la primaria

Si mi intuición y mi fe en el sistema educativo básico nacional no me fallan, todos nosotros sabemos calcular áreas de triángulos desde la primaria porque nos enseñaron una fórmula básica y ultra-conocida:

$$|\triangle ABC| = \frac{bh}{2}$$

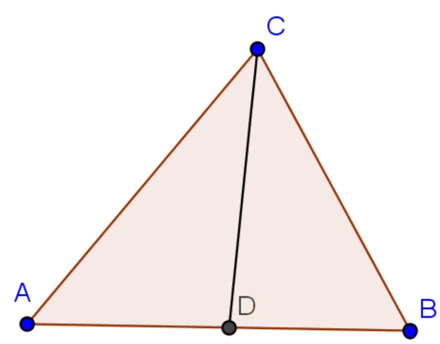
El típico "base por altura sobre dos". Pero si hemos indagado lo suficiente, nos toparemos por ahí con algunas otras formulitas. Pero esas las listaré como problemas para que las demuestres. Y por si se les olvida o si no han tenido algunas consideraciones:

- Dependiendo de la referencia, cualquiera de los lados del triángulo puede considerarse una "base".
- La altura es la línea perpendicular a la base que sale del vértice opuesto.
- "por" se refiere al producto de las longitudes de ambos segmentos.
- "sobre dos" es vilmente dividir el resultado de dicho producto a la mitad.

Pero, bueno. Vamos a lo que vamos. Veremos algunas estrategias importantes para resolver problemas con áreas.

1.1. Igualar razón de segmentos a una razón de áreas

En ocasiones (muy a menudo) podemos encontrar triángulos que tienen al menos un vértice en común. Si se traza la altura desde ese vértice, ésta a veces es compartida por varios triángulos. Por ejemplo, veamos la siguiente figura:



Si consideramos las bases AD y BD de los triángulos ACD y BCD, respectivamente, hemos de notar que sus bases están alineadas con la línea AB (pues son segmentos de ésta). Además el vértice opuesto a esa base es C en ambos triángulos, con lo que podemos decir que los triángulos comparten altura; llamemos a esa altura compartida h.

El área del ADC es $\frac{AD \cdot h}{2}$, mientras que el área del BDC es $\frac{BD \cdot h}{2}$. Si hacemos la razón de las áreas:

$$\frac{|\triangle ADC|}{|\triangle BDC|} = \frac{\frac{AD \cdot h}{2}}{\frac{BD \cdot h}{2}} = \frac{2hAD}{2hBD} = \frac{AD}{BD}$$

Con esto podemos ver que cuando dos triángulos tienen una altura en común, la razón de las bases perpendiculares a esa altura es la misma que la razón de las áreas de los triángulos. Veamos un ejemplo sencillo:

Tenemos en un triángulo ABC un punto D sobre BC tal que $|\triangle ABD| = 50$ y que $|\triangle BDC| = 25$ ¿Cuál es la razón de los segmentos BD y DC? Como los triángulos ABD y BDC comparten altura, la razón que buscamos es la razón de esas áreas, por lo que es 2.

Este mismo principio se aplicaría para triángulos que comparten base. La razón de las áreas sería la razón de las alturas (aunque no estén alineadas). La idea se vería algo así:

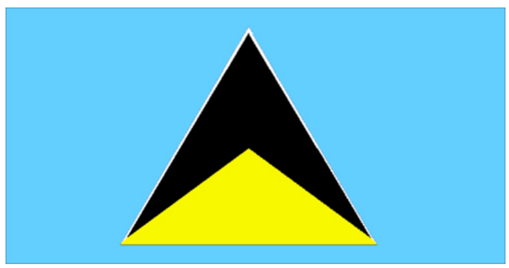


Figura 1: Sí, es la bandera de St. Lucia

1.2. El área grande es varias áreas pequeñas que la componen

Creo que aquí la idea habla por sí sola. Y probablemente digas çomo si eso no lo supiera". Pero mi punto es que no siempre estamos conscientes que así podemos generar ecuaciones y obtener información relevante para el problema. Veamos su utilidad en un ejemplo.

Un triángulo ABC tiene puntos D y E sobre BC de tal manera que $|\triangle ABD| = 8$, $|\triangle DEA| = x$ y $|\triangle ABD| = 12$. Además, sucede que $AB = 12$, $AC = x$ y $\angle BAC = 30°$. Encuentra el valor de x.

El área total del triángulo, por la suma de las áreas pequeñas es $8 + 12 + x = 20 + x$; por otra parte, tenemos datos suficientes para el área del triángulo bajo la fórmula $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}(12)(x)(\frac{1}{2}) = 3x$. Como la suma de las tres áreas pequeñas debe ser igual al área grande, sabemos que: $3x = 20 + x \therefore x = 10$.

2. Segundo, la secundaria

Pues, ¿qué les puedo decir? El Teorema de Pitágoras todos lo conocemos. O deberíamos. En caso de que no, dejen se los enuncio: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Tal vez haya quienes ya se lo saben de memoria, pero también puede haber quien desconozca el término cateto o hipotenusa. Veamos entonces unas cuantas definiciones.

- Los dos conceptos son característicos de un triángulo rectángulo.

- La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.
- Los catetos son los otros dos lados que no son la hipotenusa.

Siendo así, el teorema nos dice que si elevamos al cuadrado el valor de la longitud de cada cateto y lo sumamos, el resultado debe ser igual al cuadrado del valor de la hipotenusa; y esto es un si y sólo si: es decir, si es rectángulo cumple Pitágoras y si cumple Pitágoras es rectángulo. Entonces, sí, eso dice el Teorema de Pitágoras; pero como siempre, ahora te toca demostrarlo.
Spoiler alert:

Una sugerencia es trazar una altura.

3. Unos cuantos ejercicios

1. La bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa de un triángulo rectángulo en dos segmentos que están en relación $9 : 16$. ¿En qué relación se encuentran las áreas de los triángulos en los que se dividió?
2. Encuentra el valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12.
3. Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 85 y un cateto de longitud 84. Encuentra el valor del cateto restante.
4. En un triángulo ABC de área 20 se toma un punto D en BC tal que el área del triángulo ABD es 8. ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{BD}{DC}$? Si $BC = 10$, ¿cuánto miden los segmentos BD y DC?
5. Los lados de un triángulo miden 6, 8 y 10. Demuestra que es un triángulo rectángulo.
6. Demuestra que si a, b, c es una terna pitagórica, entonces ka, kb, kc también lo es.
7. Demuestra que si dos triángulos semejantes están en razón k, el área de uno de ellos k^2 veces el área del otro.
8. Encuentra $|\triangle ABC|$ sabiendo que $a = 20$, $b = 15$, $C = 30°$. Determina también su altura desde A y su altura desde B.

4. Agregados culturales

1. El apotema es la distancia que hay entre el punto medio de cada uno de los lados de un polígono regular hacia el centro de la figura.
2. Existe un libro chino en el que, cuenta la leyenda, se tienen más de 300 demostraciones distintas del Teorema de Pitágoras.
3. El área de un triángulo de vértices A, B, C, puede denotarse como $|ABC|$. Lo mismo para cuadriláteros y demás polígonos.
4. Se llama terna pitagórica a tres números (generalmente naturales) que, si fueran lados de un triángulo, éste sería rectángulo porque cumple el Teorema de Pitágoras.
5. Como tal, es la primera vez que existe esta lista.
6. Las ardillas se comunican entre ellas bajo distintos tipos de vocalización y marcas de olor. También utilizan su cola para alertar a otras ardillas de un potencial peligro.

5. Lista de problemas

1. Demuestra el Teorema de la Bisectriz.
2. Demuestra que el área de un triángulo puede calcularse mediante la fórmula de $\frac{bh}{2}$.
3. Demuestra el Teorema de Pitágoras.
4. Demuestra que $|\triangle ABC| = \frac{ab \sin C}{2}$.
5. Demuestra que el área de un polígono regular puede calcularse como sy, donde s es el semiperímetro e y es el apotema.
6. Demuestra que $|\triangle ABC| = sr$, donde s es el semiperímetro y r es el inradio.
7. Demuestra que para un ángulo α sucede que:
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
8. Demuestra el Teorema de la Bisectriz para una bisectriz exterior.
9. Demuestra el Teorema de la Bisectriz Generalizado.
10. Un trapecio $ABCD$, con AB paralelo a CD tiene sus diagonales AC y BD perpendiculares. Demuestra que:
$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2$$
11. Demuestra que si una línea divide al triángulo en dos áreas iguales, la línea es mediana.
12. Demuestra Ley de Cosenos (para un triángulo cualquiera de lados a, b, c:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
13. Demuestra que las medianas dividen al triángulo en seis áreas iguales.
14. Demuestra que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.
15. Sea AB un segmento fijo y sea k algún real positivo. Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos C tales que $|\triangle ABC| = k$
16. Sea ABC un triángulo con lados $AB = 5, AC = 7, BC = 9$ y sea D un punto sobre BC tal que $AD = AB$. Encuentra la razón $\frac{BD}{DC}$.
17. Sea AD la bisectriz trazada desde A. Demuestra que
$$AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$
18. Sea AB un segmento fijo y k un valor dado. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos P tales que $AP^2 - BP^2 = k$ es un perpendicular a AB.
19. Sobre los lados BA y BC de un triángulo ABC se construyen hacia afuera los cuadrados $ABDE$ y $BCFG$. Demuestra que la recta perpendicular a DG que pasa por B, corta a AC en su punto medio.

20. Sean D, E, F tres puntos dados. Para que líneas perpendiculares sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC trazadas desde los puntos E, D, F, respectivamente, se intersecten en un punto, es necesario y suficiente que
$$DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0$$

21. Demuestra que en un triángulo ABC, su área se puede obtener como
$$\frac{abc}{4R}$$

22. Sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo, c la hipotenusa y h la altura trazada hacia la hipotenusa. Demuestra que el triángulo con lados $h, c+h, a+b$ es un triángulo rectángulo.

23. Demuestra que el área de un triángulo ABC se puede obtener de la siguiente manera (con R el radio del circuncírculo)
$$(\sin A)(\sin B)(\sin C)(2R^2)$$

24. Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio R. Demuestra que:
$$AC^2 + BD^2 = 4R^2$$

25. Sea ABC un triángulo, con ángulo recto en B. Llamemos M y N a los puntos medios de los lados AC y BC, respectivamente, y sea P el punto de intersección de BM con AN. Si $AM = \frac{13}{2}$, $AB = 12$ y $|\triangle AMP| = 5$, encuentra el valor de $|\triangle ABP|$.

26. En el triángulo ABC las medidas de sus lados son $AB = 6, AC = 8, BC = 10$. Sean M el punto medio de BC, $AMDE$ un cuadrado y F el punto de intersección de MD con AC. ¿Cuál es área del cuadrilátero $AFDE$?

27. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 6. Sean P un punto en el lado BC y Q un punto en el lado CD tales que las rectas AP y AQ dividen al cuadrado en tres figuras de áreas iguales. Calcula $|\triangle APQ|$.

28. AB es el diámetro de una circunferencia con centro en D. C es un punto en AB tal que el segmento AC mide la mitad del segmento CB. Por el punto C se traza una perpendicular a AB que corta a la circunferencia en los puntos E y F. Si $|\triangle DEF| = 60$, ¿cuánto vale $|\triangle ABE|$?

29. El paralelogramo $ABCD$ tiene área 20 y cada lado mide 5. M es punto medio del lado AB, P es punto medio del segmento MC y E es el punto donde la perpendicular a BC por C corta al lado AD. ¿Cuánto vale $|\triangle APE|$?

30. Dentro del hexágono regular $ABCDEF$, se coloca un punto G arbitrario y se trazan segmentos que lo unen con los vértices, y se forman así 6 triángulos. Se dichos triángulos de blanco y negro de forma alternada. Demuestra que el área blanca es igual al área negra.

31. Sean $ABCD$ un paralelogramo y P un punto sobre el lado AB. Si Q es la intersección de las rectas PC y AD, muestra que $|\triangle BPQ| = |\triangle APD|$.

32. En un cuadrilátero convexo $ACBD$, los puntos M y N están sobre el segmento AB de tal forma que $AM = MN = NB$, y los puntos P y Q están sobre el segmento CD de tal forma que $CP = PQ = QD$. Demuestra que:
$$|AMCP| = |MNPQ| = \frac{1}{3}|ABCD|$$

6. Problemas más jarcors

1. **(Teorema de Ceva)** Sean D, E, F puntos sobre los lados BC, AC, AB, respectivamente. Demuestra que AD, BE, CF concurren si y sólo si
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

2. **(Teorema de Menelao)** Sean D, E, F puntos sobre los lados BC, AC, AB, respectivamente (se vale en la prolongación de alguno de ellos). Demuestra que D, E, F son colineales si y sólo si
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

3. **(Teorema de Stewart)**. Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo ABC. Sean $AB = c, BC = a, AC = b, AD = d, BD = n, DC = m$. Demuestra que:
$$b^2 n + c^2 m = a(d^2 + mn)$$