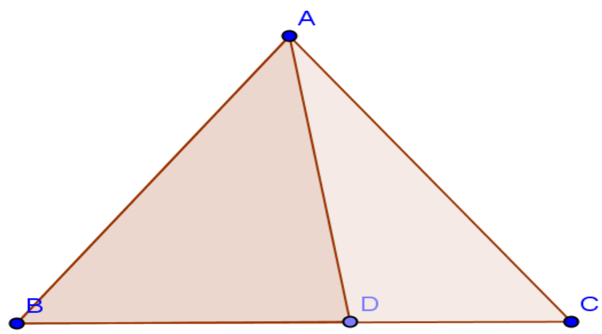
Teorema de Stewart y Círculo de Apolonio

Mauricio Marcano

1. Teorema de Stewart

Sean a,b,c las longitudes de los lados BC, AC y AB respectivamente, del triángulo ABC. Sea D un punto dentro del segmento BC. Si BD=m, CD=n y AD=d se cumple que:

$d^2a= b^2m + c^2n - mna$



Demostración:

Sea <ADB=α → <ADC= 180-α.

Utilizaremos Ley del Coseno (L.C) en ΔABD y ΔACD.

a) L.C ΔABD → $c^2= d^2 + m^2 -2dm(\cos \alpha)$ → $\cos \alpha= (d^2 + m^2 - c^2) / 2dm$ (1)

b) L.C ΔACD → $b^2= d^2 + n^2 - 2dn[\cos (180 - \alpha)]$ → como $\cos(180- \alpha)= -\cos \alpha$ tenemos que:

$b^2= d^2 + n^2 + 2dn (\cos \alpha)$ → $\cos \alpha= (b^2 - d^2 - n^2) / 2dn$ (2)

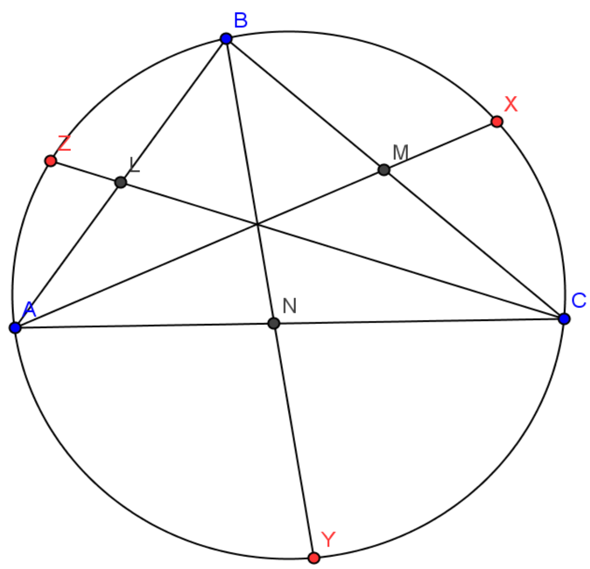
- ⇨ Igualando (1) y (2) tenemos $(d^2 + m^2 - c^2) / 2dm = (b^2 - d^2 - n^2) / 2dn$ →
- ⇨ $d^2n + m^2n - c^2n = b^2m - d^2m - n^2m$ → $[d^2n+d^2m]= b^2m + c^2n -[m^2n + n^2m]$ →
- ⇨ $d^2(m+n)= b^2m + c^2n -mn(m+n)$. Además como → m+n= BD+CD=BC=a →
- ⇨ $\underline{d^2a= b^2m + c^2n -mna}$ Demostrando así el Teorema de Stewart.

- Problema:

- Sean a, b, c las longitudes de los lados BC, CA y AB respectivamente del ΔABC. Sean m_a, m_b, m_c las longitudes de las medianas y D el diámetro de circuncirculo del ΔABC. Demostrar que: $(a^2+b^2)/m_c + (b^2+c^2)/m_a + (c^2+a^2)/m_b \leq 6D$

Demostración:

Sean M, N y L los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Prolonguemos AM, BN y CN hasta que corten al circuncírculo S del ΔABC en X, Y y Z respectivamente.



Sea Pm(S) la potencia del punto M con respecto al círculo S. → Pm(S)=AM.MX=BM.MC →

- ⇨ MX= (BM.MC)/AM → COMO BM=MC=a/2 y AM=m_a → MX= $a^2/(4m_a)$ (1)
- ⇨ Apliquemos el Teorema de Stewart para la mediana m_a:
  $AM^2.BC=AC^2.BM + AB^2CM - BC.BM.CM$ → como AM= m_a, BC=a, AC=b, AB=c y BM=CM=a/2 →
- ⇨ $m_a^2.a=b^2.(a/2) + c^2(a/2) - a.(a/2).(a/2)$ → $m_a^2= (b^2/2) + (c^2/2) - (a^2/4)$ →
- ⇨ $m_a^2= (2b^2 +2c^2 - a^2)/4$ (2)

Luego tenemos que AX=AM+MX, sustituyendo (1) tenemos → AX= $m_a + a^2/(4m_a)$ →

- ⇨ AX= $(4m_a^2+ a^2)/4 m_a$, sustituyendo (2) tenemos → AX= $[(2b^2 +2c^2 - a^2) + a^2]/4m_a$ →
- ⇨ AX=$(b^2 + c^2)/2m_a$ (3)

Como AX es una cuerda de S y la cuerda más larga de una circunferencia es el diámetro de la misma y además D es el diámetro de S → AX≤D sustituyendo (3) tenemos → $(b^2 + c^2)/2m_a \leq D$ →

- ⇨ $(b^2 + c^2)/m_a \leq 2D$ (4)

Si realizamos el mismo procedimiento con las medianas m_b y m_c obtendríamos →

- ⇨ $(c^2 + a^2)/m_b \leq 2D$ (5) y $(a^2 + b^2)/m_c \leq 2D$ (6)
- ⇨ (4),(5) y (6) son condiciones necesarias para que :

$(a^2+b^2)/m_c + (b^2+c^2)/m_a + (c^2+a^2)/m_b \leq 6D$

2. Círculo de Apolonio

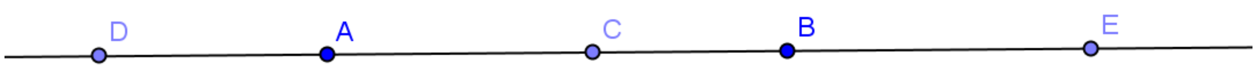
Dados dos puntos A y B sobre el plano y un número $k>0$. Se define la Círculo de Apolonio como el lugar geométrico de los puntos P tal que $AP/BP = k$.

Demostración:

Lo que debemos demostrar es que el lugar geométrico de los puntos P tal que $AP/BP=k$ para puntos fijos A y B y un numero $k>0$ dado es una circunferencia.

Lo primero que vamos a demostrar es que sobre una recta *l* que pasa por dos puntos dados A y B sólo existen dos puntos C y D tal que $AC/BC=AD/BD=k$.

Nota: Como A y B están dados entonces conocemos la distancia $AB= d$



a) Sea C un punto entre A y B que cumple la condición del problema → $AC/BC=k$

- ⇨ $(AB - BC)/ BC = k$ → $(AB/BC) - (BC/BC) = k$ → $(AB/BC) - 1 = k$ → $BC= d/(k+1)$
- ⇨ Pero $d/(k+1)$ es un número fijo y existe un sólo punto entre A y B tal que la distancia entre C y B es $d/(k+1)$

  Entonces existe C entre A y B tal que $AC/BC=k$. Sin importar k y la ubicación de A y B siempre puedo encontrar un punto que cumpla las condiciones dadas.

b) Sea X un punto sobre la recta *l* fuera del segmento AB que cumple $AX/BX = k$. Existe dos posibilidades

b.1) $XA<XB$ en este caso llamemos $X=D$

- ⇨ $AD/BD=k$ como $BD= AB + AD$ tenemos que → $AD/(AB+AD)=k$ → $(AB+AD)/AD = 1/k$
- ⇨ $(AB/AD) + (AD/AD)=1/k$ → $AB/AD= (1/k)-1$ → $AD= [k/(1-k)]AB$ → $AD= kd/(1-k)$ que es una distancia fija entonces para b.1 sólo existe un punto D tal que $AD= kd/(1-k)$ ya que no hay dos puntos sobre una misma recta que cumplan b.1) y estén a la misma distancia de A.
- ⇨ Como $AD>0$ → $0<k<1$

b.2) XA>XB en este caso llamemos X=E

- ⇨ AE/BE=k como AE= AB + BE tenemos que → (AB +BE)/BE= k →(AB/BE) + (BE/BE) = k
- ⇨ (AB/BE)=k-1 → BE=AB/(k-1)→ BE= d/(k-1) que es una distancia fija entonces para b.2 sólo existe un punto E tal que BE=d/(k-1) ya que no hay dos puntos sobre una misma recta que cumplan b.2) y estén a la misma distancia de E.
- ⇨ Como BE>0 → 1<k

- ➔ Si b.1 cumple k<1 y si b.2 cumple k>1 se tiene una contradicción entonces b.1 y b.2 no pueden ocurrir simultáneamente (Pero uno de los dos siempre cumple). Entonces dado k sabremos si el otro punto que cumple la condición inicial del problema (el que esta fuera del segmento AB) está más cerca de A o de B.

- Si k=1 entonces sólo hay un punto que cumple AP/PB=1 que es el punto medio de AB.

Ahora procedamos al resolver el problema inicial.

- ❖ Demostrar que el lugar geométrico de los puntos P tal que AP/BP=k para puntos A y B y un numero k>0 dado es una circunferencia.

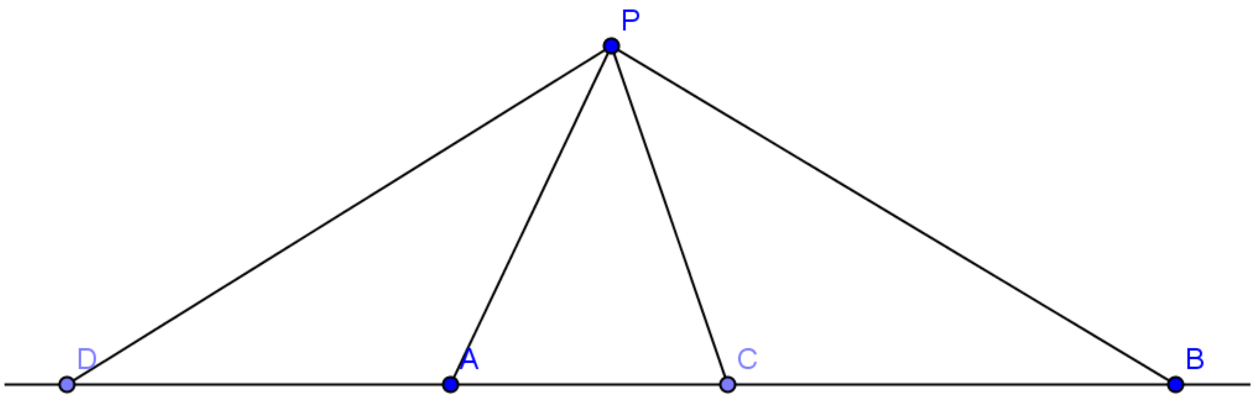
Para demostrar que el lugar geométrico es el buscado hay que demostrar dos cosas:

1) Que todo punto que cumple la condición pertenece al lugar
2) Que todo punto que pertenece al lugar cumple la condición

Demostremos 1) y luego 2)

1) Si P cumple AP/BP =k → P pertenece a la circunferencia de Apolonio del segmento AB y razón k

Se sabe que sobre la recta *l* que pasa por A y B existen dos puntos C y D que cumplen la condición, uno dentro y otro fuera (respectivamente) del segmento AB. Sin pérdida de generalidad supongamos que DA<DB.



Ya sabemos que sobre *l* no hay otros puntos además de C y D que cumplan la condición del problema.

Sea P un punto tal que AP/BP=k y P no pertenece a *l*. Luego construimos el ΔAPB y trazamos PD y PC.

Tenemos ahora que C, D y P cumple la condición del problema →

i) AP/BP= AC/BC=k y es conocido que si C es tal que PC es bisectriz interna de <APB entonces C cumple i) por Teorema de la Bisectriz Interna. Pero no hay otro punto entre AB tal que AC/BC=k entonces C es dicho punto → PC es la bisectriz interna de ΔAPB.

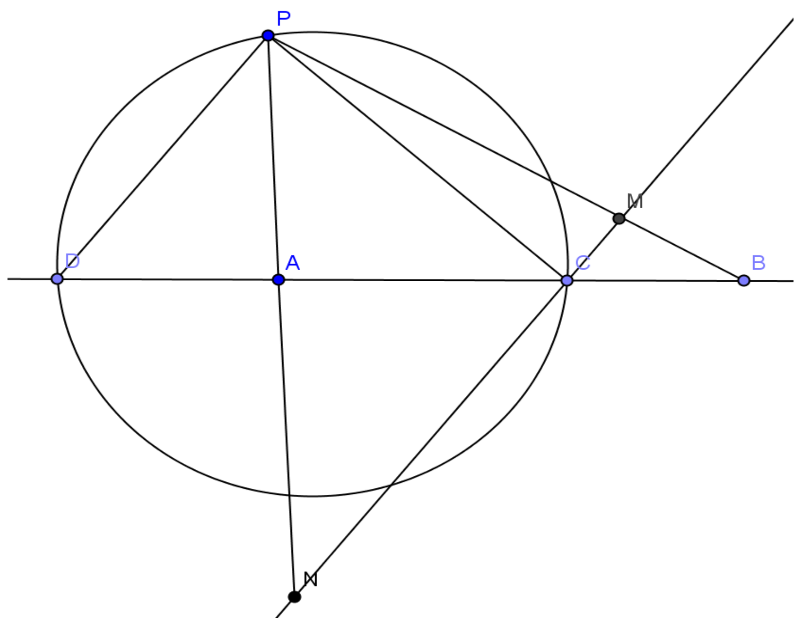
ii) AP/BP= AD/BD=k y es conocido que si D es tal que PD es bisectriz externa de <APB entonces D cumple ii) por el Teorema de la Bisectriz Externa. Pero no hay otro punto en *l* fuera de AB tal que AD/BD=k entonces D es dicho punto → PD es la bisectriz externa de ΔAPB.

Es conocido que las bisectrices internas y externas de un ángulo son perpendiculares → <DPC=90°→ Todo punto P fuera de *l* que cumple AP/BP=k cumple que <DPC=90°. Entonces transformamos el problema inicial a un nuevo problema→ Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tal que, dados dos puntos C y D se cumpla que <DPC=90°. Es conocido que dicho lugar geométrico es la circunferencia de diámetro DC

⇨ Conclusión: Si P cumple que AP/BP=AC/BC=AD/CD=k → P pertenece a la circunferencia de diámetro CD a la que llamamos Circunferencia de Apolonio del segmente AB y razón k.

Ahora se demostrará que todo punto que pertenece al lugar cumple la condición.

2) Si P pertenece a la Circunferencia de Apolonio del segmento AB y razón k → AP/BP=k



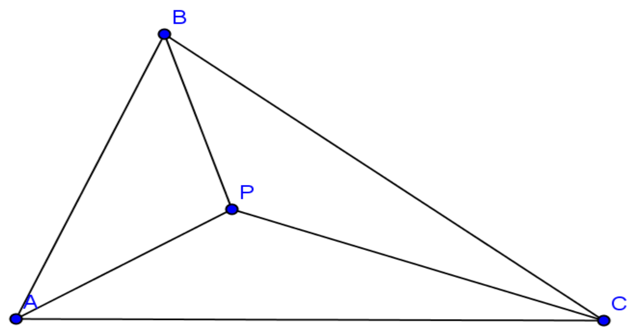
Sea S la circunferencia de diámetro DC. Sea P un punto que pertenece a S → <DPC=90°. Ahora tracemos por C una recta *r* paralela a DP. Sean M y N las intersecciones de *r* con BP y AP respectivamente.

- ⇨ Como DP//MN → <DPA=<ANC y <DAP=<CAN (por ser opuestos por el vértice) →ΔADP~ΔACN
- ⇨ DP/CN=AD/AC (1)
- ⇨ Como DP//MN → ΔDPB~ΔCMB → DP/CM=BD/BC (2)
- ⇨ Se sabe que los puntos A,B,C y D cumplen → AC/BC=AD/BD=k → BD/BC=AD/AC (3)
- ⇨ Por (3) tenemos que (1)=(2) → DP/CN=DP/CM → CM=CN (4)
- ⇨ Como <DPC=90° y DP//CN → <PCN=90° → PC es altura de ΔNMP, pero también es mediana porque CM=CN → PC es bisectriz interna de ΔNMP→ PC es bisectriz interna de ΔAPB
- ⇨ Como la bisectriz interna es perpendicular a la bisectriz externa de un triángulo y tenemos que <DPC=90° → DP es bisectriz externa de ΔAPB → Por el Teorema de la bisectriz interna y externa de un triángulo se tiene que → AP/BP=AC/BC=AD/BD=k Demostrando así que si P pertenece a la Circunferencia de Apolonio del segmento AB y razón k entonces AP/BP=k

Demostrando así que el lugar geométrico de los puntos P que cumplen AP/BP=k para puntos A y B fijos y un numero dado k>0 es la circunferencia de diámetro DC, donde D y C pertenecen a *l* (recta que pasa por A y B) y cumplen que AC/BC=AD/BD=k. Y a esa circunferencia la llamamos Circunferencia de Apolonio

- Observación: Si k=1 → el lugar geométrico de los puntos P tal que AP/BP=k=1 es la mediatriz del segmento AB.

- Problema
- Demostrar que los Círculos de Apolonio de BC y razón c/b, de AC y razón c/a y de BA y razón a/b pasan por un mismo punto P.



Llamemos P al punto en el que se interceptan los círculos de Apolonio del segmento BC y razón c/b y el del segmento AC y razón c/a.

- Como P pertenece al círculo de Apolonio de los dos segmentos, P cumple que →
- BP/CP=c/b (1)
- AP/CP=c/a → CP/AP=a/c (2)
- Si multiplicamos (1) y (2) → (BP/CP).(AP/CP)=(c/b).(a/c) →BP/AP=a/b (3)

  Pero (3) es una condición suficiente para decir que el punto P pertenece al círculo de Apolonio del segmento BA y razón a/b. Demostrando así que existe un punto P tal que de Apolonio de BC y razón c/b , de AC y razón c/a y de BA y razón a/b pasan por P.