Teorema de Tales, Semejanzas y Congruencias

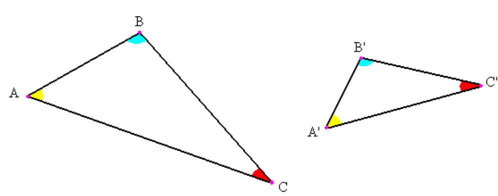
Entrenamiento #4 para 3ª etapa
2-8 de abril de 2016
Por: Lulú

Resumen

Para bien o para mal, hemos regresado a Geometría. Esta vez se seguirá un poco con lo que se vio en Angulitos, sólo que ahora se verán unas cuantas de las implicaciones de ellos y las líneas paralelas. La Geometría tiene mucho que enseñarnos y con los mismos conocimientos básicos con los que empezamos iremos construyendo material más avanzado y que será de tremenda utilidad para resolver problemas de esta área y, con la imaginación suficiente, también de otras.

1. Un pequeño preámbulo

¿Alguna vez te ha pasado que ves un figura y luego ves exactamente la misma figura pero de otro tamaño, o incluso rotada un poco? En ese tipo de situaciones, normalmente se dice que la pareja de figuras están a escala. El concepto de semejanza va por ahí. Hablando de triángulos, dos triángulos son semejantes si se puede decir que están a escala. Es decir, sin cambiar los ángulos, encogiendo o agrandando uno de los triángulos puedes llegar al otro.
Por ejemplo, la pareja de triángulos que se muestra a continuación son semejantes. Cada pareja de ángulos coloreados igual tienen el mismo valor (en caso de que alcanzaran a imprimirlo a color). Si eres daltónico o las impresiones a color salían muy caras: los ángulos en las A son iguales (ambos en la parte izquierda de cada triángulo), los ángulos en las B son iguales (arriba) y los ángulos en las C (derecha) son iguales.



Antes de avanzar a la siguiente sección, llamemos α a los ángulos amarillos (A), β a los azulitos (B) y θ a los rojos (C). Luego entenderás por qué. También entenderás cómo podrás utilizar congruencias o semejanzas de triángulos para demostrar que una pareja de lados son iguales o que un par de ángulos son iguales, o incluso que dos líneas son paralelas. Sin más, ahora sí, avancemos.

2. Semejanza y congruencia de triángulos

Ahora que quedó un poco más claro el concepto de semejanza, tenemos que ver qué implica. Así como les dije que una pareja de triángulos están a escala, hay que ver cuál es esa escala. A ese factor de escala vamos a llamarlo k. De ese modo, si multiplicamos las dimensiones de un triángulo por k obtendremos las dimensiones del otro. Es decir, si una triángulo fuera el doble del otro, k sería 2, y habría que duplicar el tamaño de un triángulo para obtener el otro (o por $1/2$ si se quiere hacer en el otro sentido).

¿Y cómo obtenemos el factor de escala? Veamos de nuevo la imagen anterior. Supongamos que $AB = 12$, $BC = 18$ y $AC = 24$ y que en el triángulo chiquito $A'B' = 4$, $B'C' = 6$ y $A'C' = 8$. Al menos aquí es claro que el grande tiene dimensiones iguales al triple del pequeño. Expresado de otra forma:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = 3$$

A esas divisiones se les conoce como **razones de semejanza** y es lo que coloquial y casualmente hemos conocido como factor de escala. Para calcular la razón de semejanza, como el nombre lo dice, es cuestión de establecer la razón entre lados homólogos. No sé si este término sea parte del léxico formal matemático, pero en cristiano quiere decir algo así como "el equivalente". Es decir, si cambiáramos de lugar los nombres de los vértices de alguno de los triángulos, ¿cómo sabremos qué lado dividir con cuál?

En este gran dilema existencial lo que yo altamente recomiendo es buscar una de dos cosas:

- Que ambos lados se encuentren opuestos al mismo ángulo. Dividir el opuesto a θ en un triángulo con el opuesto a θ en el segundo triángulo; dividir el opuesto a α del primer triángulo entre el opuesto a α del segundo triángulo. Y así para el otro ángulo.

- Que ambos lados se encuentren entre los mismos ángulos (a estos ángulos se les conoce como adyacentes, respecto a dicho segmento). Es decir que en el primer triángulo el lado esté entre α y β; y en el segundo triángulo el lado esté entre α y β.

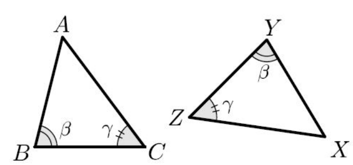
Puedes utilizar cualquiera de los dos que prefieras o se te haga más fácil.

Por cierto, algo muy importante: si el factor de escala (a.k.a. "razón de semejanza") es 1, entonces se dice que los triángulos son **congruentes**. Así se le dice a una pareja de triángulos que son exactamente iguales.

2.1. Criterios de congruencia

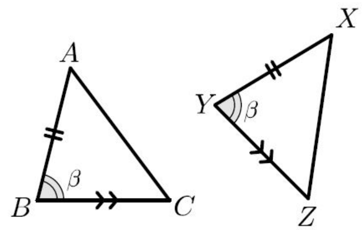
Es posible que tengamos todos los datos de una pareja de triángulos y creamos que es muy fácil obtener su razón de semejanza. Pero, ¿y si tenemos información a medias?, ¿y si no sabemos si son semejantes? Para poder establecer eso existen los siguientes criterios de congruencia:

ALA Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado entre ellos también es igual. Se usa "ALA" por "ángulo-lado-ángulo".



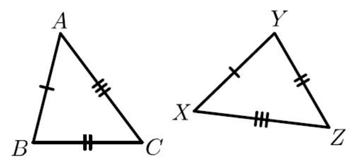
Según el criterio ALA, si $BC = YZ$ entonces los triángulos son congruentes.

LAL Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman también, entonces son congruentes. Se usa "LAL" por "lado-ángulo-lado".



Según el criterio LAL, si $AB = XY$ y $YZ = BC$, los triángulos son congruentes.

LLL Si dos triángulos tienen tres lados iguales son congruentes. Como podrás imaginarte, "LLL" viene de "lado-lado-lado".



Según el criterio LLL, si $AB = XY$, $BC = YZ$ y $AC = XZ$ los dos triángulos son congruentes.

2.2. Criterios de semejanza

Al igual que con las congruencias, existen criterios para determinar si dos triángulos son semejantes. Esos criterios son los siguientes:

AA Si dos ángulos son iguales, los triángulos son semejantes. ¿Crees que puedas explicar por qué sólo requieres saber dos ángulos? Obviamente "AA" no es por Alcohólicos Anónimos ni por las baterías, sino por "ángulo-ángulo".

LAL Si dos lados están en proporción y el ángulo que forman es igual en ambos triángulos, entonces los triángulos son semejantes. De nuevo, "LAL" es por "lado-ángulo-lado".

LLL Si ambos triángulos tienen una relación de proporción entre los tres lados, entonces son semejantes. Imaginarás, muy correctamente que "LLL" significa "lado-lado-lado".

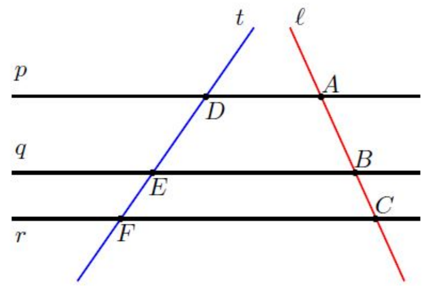
Te pondría a demostrar los criterios de semejanza y congruencia, pero lo agregaré a los problemas jarcors. Aunque quizá debas detenerte un poco en esta cuestión para que reflexiones sobre por qué no son posibles otros criterios.

3. Teorema de Tales

Si después de las lindas explicaciones te quedan dudas, te recomendaría que escucharas la canción "Teorema de Tales" de Les Luthiers. Pero primero, intentemos ver si soy suficientemente claro aquí.

Teorema de Tales 1. *Si una transversal pasa por tres líneas paralelas y los segmentos de esa transversal quedan en razón $m : n$, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en esa razón. Igual a la inversa, si ambas transversales son cortadas en la misma razón, entonces, las tres líneas son paralelas.*

No es que haya más de un Teorema de Tales, sólo que no supe cómo quitar ese 1. Dejemos eso de lado, ¿sí? Quizá haciendo las cosas con dibujitos sea un poco más entendible. La línea ℓ es la primera transversal y entonces supongamos que $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$. Siendo así, para cualquier línea t que tracemos, $\frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$. Entonces si $AB = 2BC$, DE será el doble de EF para cualquier línea t que se trace.



¿Por qué es eso cierto? Usaremos lo que sabemos de semejanzas para demostrarlo, sirve que puedes ver cómo se usan y para qué sirven. Tampoco te saques de onda si hago uno que otro truco; prometo que pronto también serás capaz de usarlos. Cabe destacar que el Teorema de Tales es un sí y sólo sí. Es un tipo de problema que se hace de ida y de regreso. Yo sólo les haré la ida.

3.1. La demostración

Imaginemos que se extienden ℓ y t hasta que chocan en un punto H. Debido a que p, q y r son paralelas sucede que $\angle DAH = \angle EBC = \angle FCH = \alpha$ (por correspondencia). Del mismo modo, $\angle ADH = \angle BEH = \angle CFH = \beta$. Entonces, por el criterio AA, los triángulos HAD, HBE y HCF son semejantes entre ellos. El α y el β sólo fue porque quise nombrar los ángulos. Te recomiendo que hagas rayones en el dibujo para que me sigas.

Siendo los segmentos AH, BH y CH todos opuestos a α en los triángulos ADH, BEH y CFH, respectivamente;y los segmentos DH, EH y FH opuestos a β en los mismos triángulos; por semejanzas se tiene el siguiente conjunto de razones:

$$\frac{BH}{AH} = \frac{EH}{DH} \tag{1}$$
$$\frac{CH}{BH} = \frac{FH}{EH} \tag{2}$$

Ahora si se le resta 1 a cada lado de la igualdad a ambas ecuaciones se obtienen cosas maravillosas. Veamos primero el lado izquierdo de ambas ecuaciones.

$$\frac{BH}{AH} - 1 = \frac{BH}{AH} - \frac{AH}{AH} = \frac{AB}{AH} \tag{3}$$
$$\frac{CH}{BH} - 1 = \frac{CH}{BH} - \frac{BH}{BH} = \frac{BC}{BH} \tag{4}$$

Ahora hagamos lo mismo con el lado derecho de las ecuaciones 1 y 2.

$$\frac{EH}{DH} - 1 = \frac{EH}{DH} - \frac{DH}{DH} = \frac{ED}{DH} \tag{5}$$
$$\frac{FH}{EH} - 1 = \frac{FH}{EH} - \frac{EH}{EH} = \frac{FE}{EH} \tag{6}$$

Entonces, juntamos las ecuaciones 3 y 5 en una sola, ya que son la parte izquierda y derecha de la ecuación 1. Luego juntamos las ecuaciones 4 y 6 porque son la izquierda y derecha de la ecuación 2. Así obtendremos que:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{ED}{DH} \tag{7}$$

$$\frac{BC}{BH} = \frac{EF}{EH} \tag{8}$$

De la ecuación 7 se puede deducir que $\frac{AB}{DE} = \frac{AH}{DH}$, y de la ecuación 8 se llega a que $\frac{BC}{EF} = \frac{BH}{EH}$, pero dado que los triángulos AHD y BHE son semejantes, se puede decir que $EH = k \cdot DH$ y que $BH = k \cdot AH$, donde k es el factor de escala entre los triángulos. Sustituyendo ésto en los últimos hallazgos, se llega a:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{BH}{EH} = \frac{k \cdot AH}{k \cdot DH} = \frac{AH}{DH}$$

Por lo tanto $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, de donde es muy fácil pasear las cosas y llegar a que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Y eso era precisamente lo que se quería demostrar.

4. Ejercicios

1. Se tiene un segmento AB, y se tienen dos puntos C y D en distintos lados de la recta AB de manera que $\angle CAB = \angle BAD$ y que $\angle ABC = \angle DBA$. Demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

2. Se tiene un segmento AB, y se tienen dos puntos C y D en distintos lados de la recta AB de manera que $AC = AD$ y que $\angle CAB = \angle BAD$. Demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

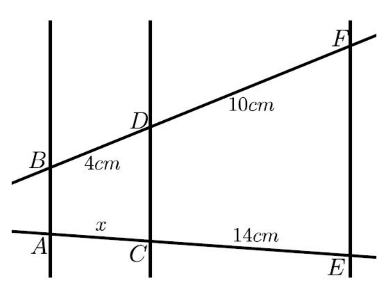
3. Se tiene un segmento AB, y se tienen dos puntos C y D en distintos lados de la recta AB de manera que $AC = AD$ y que $BD = BC$. ¿Es cierto que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$?

4. Dos segmentos AB y CD se cortan en un punto O, de tal forma que O es el punto medio de ambos segmentos. Demuestra que $\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

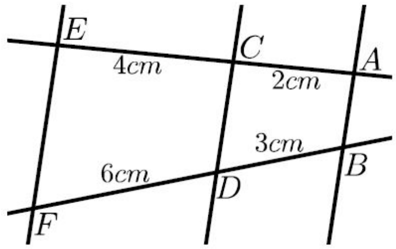
5. Juanito dibuja un triángulo rectángulo con un cateto de 3 y una hipotenusa de 5. Pablito intenta copiarle a Juanito y dibuja también un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 pero se equivoca y hace un cateto de 4. ¿Tendrá remedio y podrá Pablito aún copiarle a Juanito?

6. Juanito ahora dibuja un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5, respectivamente. Pablito quiere hacer uno que se le parezca pero que el lado menor mida 15. ¿Qué razón de semejanza existe entre los triángulos? ¿Cuáles son los otros dos lados del triángulo de Pablito?

7. En la siguiente figura, las líneas AB, CD y EF son paralelas. Encuentra el valor de x.



8. En la siguiente figura, se sabe que las líneas AB y CD son paralelas. ¿Podemos concluir que EF es paralela a ellas?



9. Calcula los lados de un triángulo sabiendo su perímetro P y que los lados son proporcionales a los números dados:
   a) $P = 18$ y los lados proporcionales a $4, 6, 8$.
   b) $P = 36$ y los lados proporcionales a $3, 4, 5$.
   c) $P = 90$ y los lados proporcionales a $1, 3, 5$.
10. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6,5m a la misma hora que un poste de 4,5m de altura da una sombra de 0,9m.

5. Agregados culturales

1. Para denotar que un triángulo ABC es semejante a otro triángulo DEF se utiliza la simbología $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
2. Para denotar que un triángulo ABC es congruente con otro triángulo DEF se utiliza la simbología $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
3. Para evitar confusiones (me acabo de enterar), es Teorema de Tales (no Thales).
4. Las vacas y los toros son daltónicos. De modo que probablemente causarías un accidente en un semáforo si le enseñas a una vaca a manejar.

6. Lista de problemas

Ahora sí, siendo un poquitín más abstracto, intenta resolver los problemas utilizando las distintas herramientas que se te explicaron en el papel. Para dudas tienes mi facebook, mi número de teléfono y a algún entrenador frente a ti (ahora este fue el texto reciclado).

1. Se tienen dos segmentos AB y CD que se cortan en un punto O y que además cumplen que AC es paralela a BD. Demuestra que $\triangle AOC \sim \triangle BOD$
2. Si sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ABC' y CAB', demuestra que $BB' = CC'$.
3. Demuestra que la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ lo divide en dos triángulos congruentes.
4. Si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ y si M es el punto medio de BC, demuestra que los triángulos ABM y ACM son congruentes.

5. Demuestra que si en un triángulo isósceles trazamos la altura que pasa por el ángulo que forman los dos lados iguales, entonces los triángulos que resultan son congruentes.

6. Demuestra que la bisectriz del ángulo distinto en un triángulo isósceles es perpendicular al lado opuesto a este vértice.

7. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle C = 90°$. Sea M un punto sobre BC tal que AM es bisectriz de $\angle BAC$, y sea N el pie de altura trazada desde M hacia AB. Demuestra que $CM = MN$.

8. Sea ABC un triángulo con $AC = AB$. Sea M un punto sobre AC, y N un punto sobre AB, tales que $AM = AN$. Supongamos que CN y BM se intersecan en P. Demuestra que $BM = CN$ y que $PC = PB$.

9. Demuestra que las diagonales de paralelogramo se cortan en su punto medio.

10. Demuestra que ABC y DEF son triángulos con AB, BC y CA perpendiculares a DE, EF y FD respectivamente, entonces los triángulos son semejantes.

11. Demuestra que en un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.

12. Demuestra que la recta que une los punto medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de las bases.

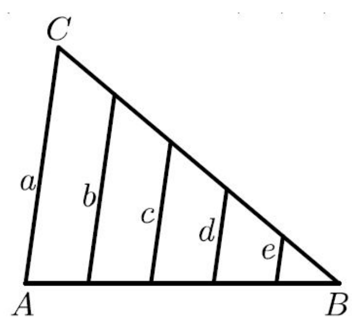
13. Demuestra que la recta media de un trapecio (véase problema anterior) divide por la mitad cualquier segmento que une puntos de sus bases.

14. La bases de un trapecio son a y b. Encuentra la longitud del segmento que uno los puntos medios de las diagonales.

15. Sean F, G, H e I los puntos medios de los lados de una cuadrilátero $ABCD$. Demuestra que el cuadrilátero $FGHI$ es un paralelogramo. [A esto se le conoce como el **teorema de Varignon**]

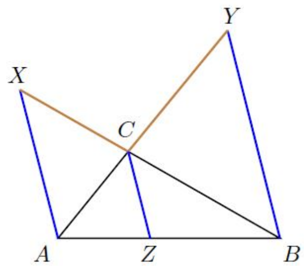
16. Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo ABC. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero $ABNC$ es paralelogramo.

17. En la siguiente figura los segmentos a, b, c, d y e son paralelos y dividen la lado AB en 5 segmentos iguales. Si $a = 10$, encuentra la suma $a + b + c + d + e$.



18. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros $\triangle ABF$ y $\triangle ADE$, respectivamente. Demuestra que $\triangle FCE$ también es equilátero.

19. En la siguiente figura, Z es un punto sobre el lado AB de un triángulo $\triangle ABC$. Una línea a través de A paralela a CZ interseca a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ interseca a AC en Y. Demuestra que $\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$.



20. En la diagonal BD de un paralelogramo $ABCD$ se toman dos puntos P y Q de manera que $DP = BQ$. Sean S y R la intersección de AP con CD y AQ con BC. Demuestra que $BD||SR$. (**Nota:** Procurar resolver este problema sólo visualmente, sin anotar las razones; paseándolas con las manos y la mirada)

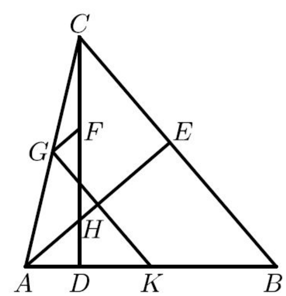
21. Sea F el pie de altura del vértice C del $\triangle ABC$. Sea G un punto sobre la prolongación de la altura BE, de manera que $GE = CF$. Sea H el punto sobre la prolongación de AB, de forma que $GH \parallel AC$. Demuestra que $\triangle ACH$ es isósceles.

7. Problemas más jarcors

1. Si el Teorema de Tales es un sí y sólo sí, demuestra el regreso.

2. Demuestra los criterios de semejanza y congruencia y explica por qué no funcionarían otros criterios.

3. En la siguiente figura, AE y CD son alturas del $\triangle ABC$. H es el punto de intersección de AE con CD; y F, G y K son los puntos medios de CH, CA y AB, respectivamente. Demuestra que el $\angle FGK$ es un ángulo recto.



4. Demuestra que el segmento de línea que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, biseca el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.

5. Sean ABC un triángulo y D un punto tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$. Si AD, BD y CD se prolongan hasta intersecar al circuncírculo del triángulo ABC en B', C' y A', respectivamente, muestra que ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

6. Sean $ABCD$ un trapecio y M el punto medio de DC. Sean L y N los puntos medios de AD y BC, respectivamente. Demuestra que las diagonales AC y BD cortan a LN en tres segmentos iguales.