Teorema de la bisectriz y un poco de Ley de Senos

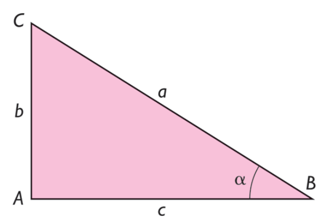
Entrenamiento #3 para 4ª etapa
01-03 de julio de 2016
Por: Lulú, Fernando, Argel

Resumen

Bienvenidos sean de nuevo a Geometría, el área con mayor cantidad de temas en la Olimpiada. En esta ocasión les vengo a hablar de una de mis herramientas favoritas en Geometría: el Teorema de la Bisectriz. También se aprovechará la ocasión para mezclarlo con Ley de Senos, ya que la cantidad de problemas específicos de esos temas son contados. Podrás compartir el espacio. Qué bien, ¿no?

1. Empecemos con Ley de Senos

Para empezar, veremos algunas de las funciones trigonométricas: la función seno y coseno, las cuales muestran relaciones entre los distintos lados de un triángulo



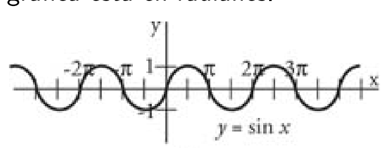
En un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\angle A$, como se muestra en la figura, la función seno se define como:

$$\sin\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

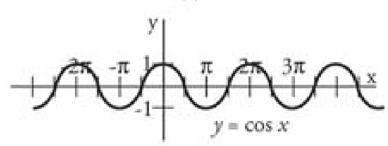
La función coseno, se define como

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

Les presentamos las gráficas de las funciones seno y coseno, aunque no son esenciales para responder problemas pueden ser interesantes. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas? Responder a esa preguntar sí podría ayudarte a encontrar algunas propiedades interesantes del seno y el coseno que podrías utilizar en la resolución de problemas. Por cierto, la gráfica está en radianes.



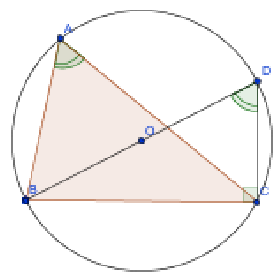
(a)



(b)

Una vez que han quedado claras las funciones seno y coseno, veamos la famosa ley de senos. Oh, sí. Ya se les encargó que lo demostraran en cíclicos. ¿Lo hicieron? Si no, pos ahí va. Entendemos que se dificulta pensar en senos para triángulos cualesquiera, ¿cómo le hago si no tengo triángulos rectángulos? Podemos crearlos. Veámoslo en la demostración:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



En una circunferencia con centro O se tiene un $\triangle ABC$ inscrito. Se traza el diámetro desde B hasta que interseque con la circunferencia en un segundo punto D. Como BD es diámetro, el $\measuredangle BCD = 90°$. A su vez, dado que los puntos A, B, C, D están en la circunferencia, estos forman un cuadrilátero cíclico, por lo que se sabe que $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC = \measuredangle A$. Con ello, ya podemos definir un seno en el triángulo rectángulo BDC.

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

Despejando se obtiene

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

Análogamente para los otros

$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$
$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

Con ello hemos demostrado la famosa Ley de Senos: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

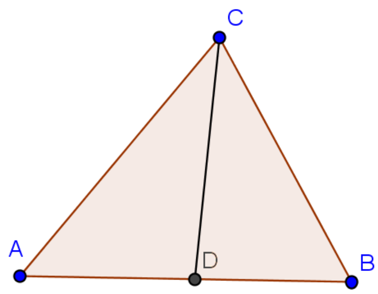
El uso de funciones trigonométricas puede ser útil, como es el caso de la ley de senos. Otro ejemplo de su utilidad es la siguiente fórmula del área del triángulo (¿se te ocurre alguna manera de demostrarla? Te invitamos a que lo intentes).

$$\frac{ab \sin \alpha}{2}$$

.

2. Teorema de la bisectriz: ¿Qué es?, ¿qué dice?, ¿con qué se come?

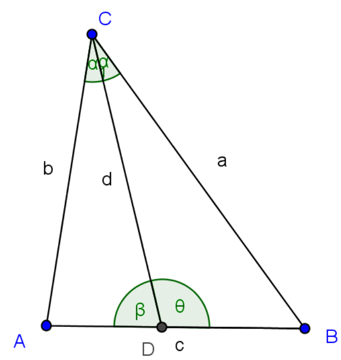
Pues, a grandes rasgos (y también pequeños), el Teorema de la Bisectriz nos dice que la razón en la que una bisectriz corta a un lado del triángulo es igual a la razón entre los otros dos lados del triángulo. Si no queda muy claro, les va la traducción al cristiano:



Dado un $\triangle ABC$, se traza una bisectriz desde C que interseca a AB en D. El teorema de la bisectriz establece la siguiente relación:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$$

Pero vamos a demostrarlo. ¿Recuerdan que les habíamos dicho que la ley de senos era útil? Usémosla considerando un dibujo como el siguiente.



Aplicando la ley de senos en $\triangle ACD$:

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{CD}{\sin CAD} \Longrightarrow AD\sin\beta = AC\sin\alpha$$

Luego, en el $\triangle BCD$:

$$\frac{DB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\theta} = \frac{CD}{\sin CBD} \Longrightarrow DB\sin\theta = BC\sin\alpha$$

El ángulo $\theta = 180 - \beta$, por ende sus senos son iguales, ya que $\sin\beta = \sin(180 - \beta)$ (ésta es una propiedad trigonométrica conocida). De ese modo:

$$DB\sin\theta = DB\sin(180 - \beta) = DB\sin\beta = BC\sin\alpha$$

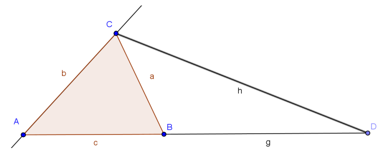
Al dividir ambas ecuaciones, se llega a que:

$$\frac{AD\sin\beta}{DB\sin\beta} = \frac{AC\sin\alpha}{BC\sin\alpha}$$

Lo que resulta en

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$$

Y... bueno. Eso es lo que queríamos demostrar, ¿no? Dato curioso: ésta no es la única manera de demostrar este teorema de gran utilidad (¿se te ocurre alguna otra?). Les parecerá interesante que también existe una versión para las bisectrices exteriores, pero no es demasiado distinto a lo que recién vimos. Y, por supuesto, tendrás que demostrarlo.



Siendo AD la bisectriz exterior de $\measuredangle ACB$, se tiene el siguiente resultado (¿encuentras la similitud?):

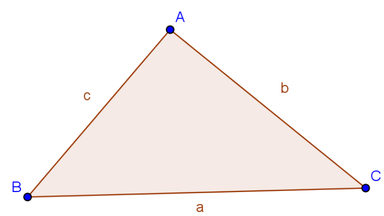
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$$

Existe también una versión generalizada del teorema de la bisectriz, es decir un teorema de la bisectriz generalizado (no generatriz visceralizada, no se confundan). El hecho que sea la versión generalizada implica que la línea no necesariamente tiene que ser una bisectriz, sino que puede partir el ángulo como se le dé la regalada gana. La demostración te toca a ti hacerla, obviamente.

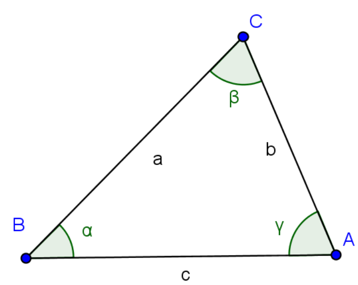
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC \cdot \sin ACD}{BC \cdot \sin DCB}$$

3. Unos cuantos ejercicios

1. Encuentre el lado a, si $b = 5$, $\measuredangle ABC = 60°$ y el $\measuredangle BAC = 45$ (Nota: $\sin 45$ y $\sin 60$ son valores que deberías conocer).



2. Encuentre la medida del $\measuredangle CBA$ si $a = 8$, $b = \frac{16}{\sqrt{2}}$ y que $\measuredangle CAB = 30°$ (Nota $\sin 30$ también es ultra-conocido).



3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $AB = 8$, $BC = 6$ y sea BM una bisectriz interna. Si $AM = 2$, encuentra el valor de AC.

4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $AB = 2$, $BC = 5$ y sea BM una bisectriz interna. Si $AM = 3$, encuentra el valor de AC.

5. En un triángulo de lados 36, 54 y 70 se traza la bisectriz del ángulo opuesto al lado mayor. Encuentra la diferencia entre los segmentos que se forman sobre dicho lado.

4. Agregados culturales

1. A la ley de senos, dependiendo dónde lo veas, también se le conoce como Teorema del Seno.
2. Al Teorema de la Bisectriz Generalizada también se le conoce como Teorema Generalizado de la Bisectriz. Gran diferencia.
3. Particularmente en Baja California, debido a la genialidad de sus entrenadores, también se le conoce coloquialmente a ese teorema como el Teorema de la Generatriz Visceralizada.
4. Una bisectriz es normalmente conocida como una línea que divide un ángulo a la mitad, aunque esa es una implicación directa de su definición formal: una línea que parte de la unión de dos rectas y que equidista de dichas rectas.
5. Teorema de la Bisectriz es el teorema favorito de Lulú y Diana.
6. La primera lista de Teorema de la Bisectriz la hizo Lulú en 2013. En Word. En Cancún.
7. Las ardillas se pueden encontrar en todos los países del mundo, excepto en Australia.

5. Lista de problemas

1. Demuestra el Teorema de la Bisectriz para una bisectriz exterior.
2. Demuestra el Teorema de la Bisectriz Generalizado.
3. Sean a, b y c los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, respectivamente. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del $\angle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$.
4. Demuestra que si la bisectriz cae en el punto medio, entonces el triángulo es isósceles.
5. Demuestra que las bisectrices concurren.
6. Sean ABC un triángulo y L el punto medio de BC. Sean M y N puntos sobre CA y AB tales que LM y LN son bisectrices de los ángulos $\angle CLA$ y $\angle ALB$, respectivamente. Sean C_1 el circuncírculo del triángulo LMN y P el punto de intersección de C_1 con AL, distitno de L. Demuestra que el cuadrilátero $MPNL$ es un rectángulo.
7. La bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa de un triángulo rectángulo en dos segmentos que están en relación $9 : 16$. ¿En qué relación divide a la hipotenusa la altura interna de dicho triángulo?
8. Sea BD la bisectriz del ángulo B del triángulo ABC. El circuncírculo del $\triangle BDC$ interseca a AB en E y el circuncírculo de $\triangle ABD$ interseca a BC en F. Demuestra que $AE = CF$.
9. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos con $AB = A'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\angle ABC + \angle A'B'C' = 180°$. Muestra que
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A'C'}$$
10. Sea I el incentro del triángulo ABC. Consideremos M y N los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Si $MI = NI$, demuestra que el cuadrilátero $AMIN$ es cíclico.
11. Sea AD la bisectriz trazada desde A. Demuestra que
$$AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

12. Sean M y N puntos en los lados AB y BC, respectivamente, del paralelogramo $ABCD$ tales que $AM = NC$. Sea Q el punto de intersección de AN y CM. Demuestra que DQ es la bisectriz de $\angle CDA$.

13. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y sea E el punto de intersección de la bisectriz de $\angle BDC$ con BC. Sean M y N los puntos medios de BE y DC, respectivamente, y sea F el punto de intersección de MN con BD. Demuestra que $AD = 2BF$.

14. Sobre los lados BA y BC de un triángulo ABC se construyen hacia afuera los cuadrados $ABDE$ y $BCFG$. Demuestra que la recta perpendicular a DG que pasa por B, corta a AC en su punto medio.

15. Sean ABC un triángulo y ℓ la recta tangente a su circuncírculo que pasa por A. Sean D y E puntos sobre ℓ y AC, respectivamente, tales que $AD = AB = AE$ y con D del mismo lado que B con respecto a AC. Demuestra que DE pasa por el incentro del triángulo ABC.

16. Sea F una semicircunferencia con diámetro AB y D un punto sobre el segmento AB. La perpendicular por F al segmento AB intersecta a F en C. Si P y Q son puntos sobre F tales que $CP = CD = CQ$, demuestra que PQ corta a CD en su punto medio.

17. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro del triángulo ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI intersecta por segunda vez al circuncírculo de ABC en J. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BIJ y CIJ son tangentes a las rectas IC e IB, respectivamente.

18. En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N, de tal manera que $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{CD}$. Demuestra que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.

19. Sean ABC un triángulo e I su incentro. Sean L y D los puntos de intersección de la bisectriz interior del ángulo en A con el lado BC y el circuncírculo del triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que

$$\frac{AD}{DI} = \frac{AI}{IL}$$

20. Demuestra que en un triángulo ABC, su área se puede obtener como

$$\frac{abc}{4R}$$

    Donde a, b y c son las medidas de los lados del triángulo y R es el radio de la circunferencia circunscrita.

21. Sea ABC un triángulo con $AB = BC$ y $\angle CBA = 30^\circ$, y sean D el pie de altura desde A y M el punto medio de BC. Llamamos P al pie de la perpendicular desde M hacia la paralela a BC por A. El segmento MP cruza a la altura desde B hacia AC en R. Encuentra el valor de $\frac{RB}{RP}$.

22. Demuestra que el área de un triángulo ABC se puede obtener de la siguiente manera (con R el radio del circuncírculo)

$$\sin A \sin B \sin C 2R^2$$

23. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y AD la bisectriz del ángulo $\angle A$. Sea E el pie de la perpendicular a AD desde C. Demuestra que $AE = \frac{AC+AB}{2}$ si y sólo si $AD = AB$.

24. En cualquier triángulo ABC,demuestre que si a, b y c son los lados del triángulo entonces

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$$

25. Use la ley de senos para demostrar

$$\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

26. En el triángulo ABC, la altura y la mediana desde C dividen a $\measuredangle C$ en tres ángulos iguales. Encuentre los ángulos del triángulo.

27. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

28. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB = AD$. Las diagonales se intersectan en E. Si F es un punto sobre AC tal que $\angle BFC = \angle BAD = 2\angle DFC$. Determina el valor de $\frac{BE}{DE}$.

6. Problemas más jarcors

1. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del ángulo ACD toca a BA en K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, prueba que $\angle BKC = \angle CDB$.

2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Si la altura BH se corta en Q con la bisectriz interior AD, demuestra que
$$\frac{QA}{QD} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{b+c}{c}$$

3. En el triángulo ABC, la altura, la bisectriz y la mediana desde C dividen a $\measuredangle C$ en cuatro ángulos iguales. Encuentre los ángulos del triángulo.

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $\measuredangle CBD = 2\measuredangle ADB$, $\measuredangle ABD = 2\measuredangle CDB$, y $AB = BC$. Demuestre que $AD = CD$

5. Sea CM una mediana del triángulo ABC. Demuestre que el producto del circunradio de $\triangle ACM$ y la altura trazada desde M a $\angle ACM$ es igual al producto del circunradio de $\triangle BCM$ y la altura trazada desde M en $\angle BCM$.

6. Sean ABC un triángulo e I_a, I_b e I_c los excentros asociados a los vértices A, B y C, respectivamente. Demuestra que $|I_aI_bI_c| \geq 4|ABC|$, donde $|XYZ|$ denota el área del $\triangle XYZ$.

7. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en P. Se sabe que la diagonal BD es perpendicular al lado AD, que $\angle BAD = \angle BCD = 60°$, y que $\angle ADC = 135°$. Encuentra la razón $\frac{DP}{PB}$.