Teorema de los Pichones

Entrenamiento #9 para 3ª etapa
30 de abril - 6 de mayo de 2016
Por: Lulú

Resumen

Bienvenidos sean de nuevo a Combinatoria, oh sí. Pero esta vez hablaremos sobre el teorema de los pichones, de modo que es importante que sepamos contar bien, sobre todo saber identificar las repeticiones de algunas situaciones de la vida.

1. Un pequeño preámbulo que abarca toda la teoría

El Teorema de los Pichones es, en realidad, algo muy sencillo. Imaginemos el escenario en que se nos va la luz en casa y queremos, por algún motivo extraño y desconocido, sacar calcetines de un cajón. Si estamos a oscuras y sólo tenemos dos tipos diferentes de calcetines, ¿cuántos calcetines tendrás que sacar del cajón para asegurar que tendrás al menos una pareja del mismo tipo? Reflexiónalo un poco antes de seguir leyendo.

Lo ideal es que hayas llegado a la conclusión de que, si tienes muy mala suerte y sacas uno de cada tipo, el tercero a fuerzas coincide con alguno de los dos tipos. Entonces, basta con sacar tres calcetines porque no tenemos forma de garantizar el tipo de suerte que tendremos. Y si en lugar de tener, digamos, calcetines negros y blancos, ¿qué pasa si tenemos calcetines negros, blancos, rojos, azules y grises pero todavía queremos asegurarnos de tener al menos un par de calcetines del mismo color?, ¿cuántos tendríamos que sacar?, ¿y si fueran n colores?

Bueno, así es como funciona el principio de los pichones. Pero hay que darle un poco más de formalidad al asunto. Para ello, pensemos en una cantidad k de categorías: pueden ser colores, tamaño, formas, etc. Entonces, si tenemos $k+1$ objetos, habrá alguna categoría que tenga al menos dos objetos. La demostración es sencilla, pues si se coloca cada objeto en una categoría ("coloquialmente" llamada *casilla* o *pichonera*) de manera que nunca coloquemos dos en la misma, terminaremos con un objeto que sobra y todas las casillas llenas. Ese objeto que sobra, al colocarlo, debe estar en alguna categoría; pero ya todas tienen un objeto. Por lo tanto, habrá alguna categoría que tenga dos (al menos) categorías.

A esto se le conoce como la **versión débil de casillas**. Y probablemente habrás intuido que existe una versión fuerte. Pues, estás en lo correcto, pero te tocará demostrarlo a ti. A continuación te enuncio "formalmente" lo que dice cada versión de casillas.

Versión débil del Principio de casillas Si se tienen n casillas y al menos $n+1$ objetos, habrán al menos una casilla con dos o más objetos.

Versión fuerte del Principio de casillas Si se tienen n casillas y al menos $nk+1$ objetos, habrá al menos una casilla con $k+1$ o más objetos.

1.1. Otras formas de casillas.

Hay algunas otras versiones, que si bien no son parte propiamente del principio de casillas, mantienen la misma esencia de simplicidad, utilidad e intuitividad. Aquí va una más.

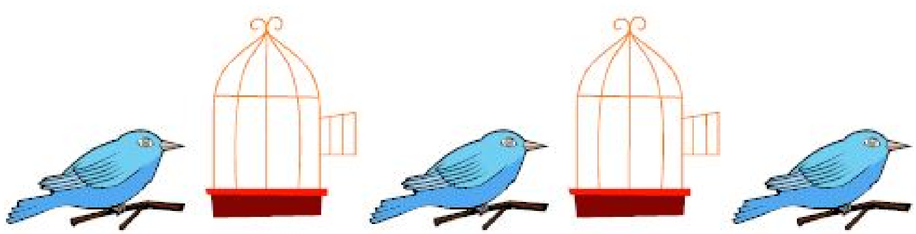
Versión del promedio Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces hay algún a_i con $a_i \leq a$. Además hay algún a_j con $a_j \geq a$

2. Ejercicios

1. Una bolsa contiene bolas de dos colores: blanco y negro. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que hay que extraer de la bolsa para garantizar que haya dos del mismo color? ¿Y para 10?
2. Un millón de pinos crecen en el bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de $600,000$ agujas. Prueba que en el bosque hay dos pinos que tienen el mismo número de agujas. ¿Puedes asegurar 3?
3. 51 mujeres y 49 hombres se sientan en una mesa redonda. Prueba que existen dos mujeres que están sentadas diametralmente opuestas.
4. Cien personas están sentadas en una mesa redonda. Si se sabe que la cantidad de hombres y de mujeres no es la misma, prueba que siempre hay dos personas del mismo género que están diametralmente opuestas.
5. Si un marciano tiene un número infinito de calcetines rojos, azules, amarillos y negros en un cajón, ¿cuántos calcetines debe sacar para garantizar que tendrá un par? ¿Cuántos si el marciano tiene 6 pies y quiere calcetines del mismo color para todos ellos?
6. Prueba que en cualquier grupo de 5 personas, hay al menos 2 que tienen el mismo número de amigos en el grupo.
7. 25 cajas de manzanas son compradas en una tienda. Las manzanas son de tres tipos distintos y todas las manzanas de cada caja son del mismo tipo. Prueba que entre las cajas hay al menos 9 que contienen el mismo tipo de manzanas.
8. Si se eligen cinco números de los enteros del 1 al 8, entonces dos de ellos deben sumar nueve.
9. Dados 12 enteros, prueba que siempre se pueden escoger dos de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11.
10. Se colocan 17 torres en un tablero de ajedrez de 8×8. Prueba que hay al menos 3 torres que no se amenazan entre sí.

3. Agregados culturales

1. Al teorema de los pichones también se le conoce como "Teorema de los Palomares", "Teorema de Casillas", "Principio de Dirichlet" y, en inglés, "Pigeon-Hole Principle".
2. Desconozco el origen del nombre de "Teorema de los pichones" y sus semejantes.
3. Por obvias razones, este tema siempre se explica con pájaritos y algunas jaulas como la imagen que se muestra a continuación.



4. La simbología $a \in A$ se lee "a se encuentra en A" y significa que el conjunto A contiene a a dentro de sus elementos.

5. Se le conoce como "punto lattice" a un punto en plano con coordenadas enteras.

6. El juego de damas chinas, es el juego en el que tienes un tablero con una estrella de 6 picos y usas canicas. El juego de damas inglesas es el juego en el que se tiene un tablero tipo ajedrez y se utilizan fichas que se mueven en diagonal.

4. Lista de problemas

1. Demuestra la versión fuerte del teorema de casillas.

2. Sea A un conjunto de 19 enteros distintos tomados de la progresión aritmética $1, 4, 7, \cdots, 100$. Prueba que deben existir 2 enteros distintos cuya suma sea 104.

3. Prueba que si se tienen 100 números enteros, se pueden escoger 15 tal que la diferencia entre cualesquiera dos sea divisible por 7.

4. Prueba que si se colocan cinco punto en un triángulo equilátero de lado 2 existen dos a distancia menor o igual a 1.

5. Suponga que S es un conjunto con $n+1$ enteros. Pruebe que existen distintos $a, b \in S$ tales que $n|a-b$.

6. Hay siete líneas rectas en un plano. Prueba que hay dos de ellas que forman un ángulo menor a $26°$.

7. En los cuadros de un tablero de 8×8 se colocan números enteros (un número por cuadro) de manera que la diferencia entre dos cuadros vecinos es a lo más 1. Demuestra que hay un número que se repite 5 veces.

8. Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 3×7 se pintan de negro y otros se dejan de blanco. Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo en cuyas cuatro esquinas los cuadritos tienen el mismo color.

9. Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 19×4 se pintan de rojo, otros de azul y otros de verde (no se deja ninguno en blanco). Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo cuyas cuatro esquinas tienen el mismo color.

10. Sea colorea cada casilla de un tablero de 5×41 ya sea de blanco o de negro. Prueba que es posible elegir tres columnas y tres filas de modo que las 9 casillas en las que se intersecan sean todas del mismo color.

11. Todos los puntos en el plano se pintan de rojo o azul. Demuestra que siempre es posible encontrar un par de puntos del mismo color que estén separados por una distancia de exactamente 1.

12. Todos los puntos en el plano se pintan de rojo o azul. Demuestra que siempre es posible encontrar cuatro del mismo color que formen un rectángulo.

13. Todos los puntos de una línea recta se colorean con 11 colores. Prueba que es posible encontrar dos puntos del mismo color que estén separados por un número entero de centímetros.

14. Los estudiantes de una escuela decidieron plantar 79 árboles durante 50 días consecutivos. Además, decidieron que plantaría al menos un árbol por día, Prueba que es posible encontrar una serie de días consecutivos (tal vez un sólo día), tal que los estudiantes plantaron exactamente 20 árboles.

15. Sea $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ una permutación de los números del 1 al n, donde n es impar. Demuestra que es par el producto siguiente:

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i - i)$$

16. En un hexágono regular de lado $2a$ se tienen 25 puntos dentro; muestra que existen dos puntos tales que su distancia es a lo más a.
17. Se tienen 5 puntos lattice en el plano. Prueba que existen dos de ellos tales que su punto medio también es lattice.
18. Se tienen 9 puntos lattice en el espacio. Prueba que existen dos de ellos tales que su punto medio también es lattice.
19. Un triángulo equilátero y un cuadrado se inscriben en una circunferencia de perímetro 1, de manera que un vértice del triángulo coincide con un vértice del cuadrado. Los vértices dividen a la circunferencia en 7 arcos. Muestre que alguno de estos arcos tiene longitud menor o igual a $\frac{1}{24}$
20. Quince niños juntaron 100 naranjas de un manzano. Demuestra que hay al menos dos niños que juntaron la misma cantidad de plátanos. (**Problema de las peras**)
21. Muestra que en cualquier grupo de n personas, entonces existen dos que tienen exactamente el mismo número de conocidos en el grupo.
22. Dos cajas contienen entre las dos 65 canicas de tamaños diferentes. Los colores de las canicas son: blanco, negro, rojo o amarillo. Además, si se toman cinco canicas del mismo color, dos de ellas siempre son del mismo tamaño. Pruebe que hay al menos tres canicas en la misma caja que tienen el mismo color y el mismo tamaño.

5. Problemas más jarcors

1. Prueba que en cualquier conjunto de 51 puntos adentro de un cuadrado unitario, hay siempre 3 puntos que pueden ser cubiertos por un círculo de radio $1/7$
2. Demuestra que existen dos potencias de 3 distintas tales que su diferencia es divisible entre 2014
3. Cada entero del 1 al 100 (incluyéndolos) se colorea de rojo, azul, verde o negro. Demuestra que hay dos números del mismo color cuya diferencia es también de ese color.
4. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos en tres cajas distintas. Pruebe que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.
5. Considérese un conjunto S se n elementos. Prueba que siempre es posible elegir un subconjunto de S tal que la suma de sus elementos sea divisible entre n.