TFA

Daniela Maribel Trancoso Cervantes

1. Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA)

El Teorema Fundamental de la Aritmética nos dice que todo número entero mayor a la unidad puede ser escrito como producto de primos o como el producto de sus divisores primos diferentes, elevados a exponentes enteros positivos, esta representación es única salvo por el orden de sus factores y se denomina descomposición canónica.

Dado un número entero positivo *n*, tenemos tres funciones aritméticas para denotar a la cantidad de divisores de *n*, a la suma de dichos divisores y a la multiplicación de los mismos:

1. Para la cantidad de divisores de *n* utilizamos la función $\tau(n)$. Esta letra griega se llama *tau,* letra que en esta ocasión nos ayudará a determinar cuántos divisores positivos tiene el número n, con base en su descomposición canónica.
2. Para indicar la suma de los divisores de n vamos a utilizar la función $\sigma(n)$. Esta letra griega se llama *sigma* y, de igual forma, con base en la descomposición canónica del número *n*, nos ayudará a determinar fácilmente la suma se los divisores de *n*.
3. Nuestra última función es $\pi(n)$. Esta letra ya deben conocerla muy bien, pero puedo recordarles su nombre, es la letra griega *pi*. Esta función es igual de útil que las anteriores, nos ayudará a calcular el producto de los divisores de *n*, también con base en la descomposición canónica del número.

Todas estas funciones dependen de los factores primos del número *n* y de los exponentes de estos.

2. $\boldsymbol{\tau(n)}$ y la cantidad de divisores

Ejercicio:

- No bajes más en el material y encuentra una fórmula para calcular la cantidad de divisores de un número *n*.

Sea $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, la factorización por primos de *n* o la descomposición canónica del mismo, la cantidad de divisores positivos de *n* es

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1)\cdots(e_k + 1).$$

Es fácil ver que $\tau(n) = 2$ si y sólo si, n es primo.

Ejemplo: $1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$ entonces como los exponentes de los factores primos son 4, 1 y 2 tenemos que 1200 tiene $5 \times 2 \times 3 = 30$ divisores, es decir, $\tau(1200) = 30$.

Si un entero es un cuadrado perfecto entonces al factorizarlo todos los exponentes de sus factores primos serán pares, por lo cual, al hacer el producto de todos sus exponentes incrementados en uno, obtendremos un número impar, así pues, tendrá una cantidad impar de divisores. Inversamente, si un entero positivo tiene una cantidad impar de divisores entonces es un cuadrado perfecto. Esto se puede generalizar de la siguiente forma:

Sea $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, la factorización por primos de *n* o la descomposición canónica del mismo, *m* es divisor de todos los exponentes e_k si y solamente si *n* tiene raíz *m*-ésima exacta.

Ejemplo: $1024192512 = 2^{12} \times 3^6 \times 7^3$ tiene raíz cúbica exacta ya que todos los exponentes son múltiplos de 3.

3. $\boldsymbol{\sigma(n)}$ y la suma de divisores

Ejercicio:

- NO BAJES MÁS EN EL MATERIAL y encuentra una fórmula para calcular la suma de los divisores de un número *n*.

Como se mencionó antes, la función sigma es muy útil para calcular la suma de los divisores de un número entero positivo *n*.

Sea $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, la factorización por primos de *n* o la descomposición canónica del mismo, la suma de los divisores positivos de *n* es

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right) \cdots \left(\frac{p_k^{e_k+1} - 1}{p_k - 1}\right)$$

Ejemplo: Si quisiéramos obtener la suma de los divisores de 360, primero tendríamos que expresarlo con su descomposición canónica, entonces $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Luego, utilizamos la función sigma y obtenemos que $\sigma(360) = 1170$.

$$\sigma(360) = \left(\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right) = (15)(13)(6) = 1170$$

4. $\boldsymbol{\pi(n)}$ y el producto de divisores

Ejercicio:

- **NO BAJES MÁS EN EL MATERIAL** y encuentra una fórmula para calcular el producto de los divisores de un número *n*.

Como dije antes, la función $\pi(n)$ nos será de gran utilidad cuando queramos calcular el producto de los divisores de un número *n* y lo mejor de todo es que esta función se puede expresar de una forma muy simple, ya que depende de otra que vimos anteriormente, $\tau(n)$.

Al depender de la función τ, la función aritmética π también calcula el producto de divisores con base en la descomposición canónica del número.

La función π se puede calcular mediante:

$$\pi(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Ejemplo: Para encontrar el producto de divisores de 540 primero debemos calcular la cantidad de divisores. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ por lo que $\tau(n) = (2+1)(3+1)(1+1) = 24$. Entonces, $\pi(540) = 540^{12}$.

Caso particular: Descomposición canónica del factorial de un número entero positivo.

Ejemplo: Descomponer el número $24!$.

$24!$ Se puede expresar de la siguiente forma:

$$24! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times \ldots \times 23^i$$

Para calcular los exponentes se divide sucesivamente, el número del que se tiene el factorial, en este caso el 24, entre el factor primo del que se desea encontrar su exponente, y enseguida se suman los cocientes como se muestra a continuación:

Para obtener el exponente del número 2 dividimos sucesivamente el 24 entre 2.

$24 \div 2 = 12 \div 2 = 6 \div 2 = 3 \div 2 = 1 \div 2 = 0$ y se tiene un residuo de 1.

Sumamos los cocientes, que son los números que se encuentran en color rojo.

$$a = 12 + 6 + 3 + 1 = 22$$

Ahora, para el exponente del número 3, dividimos sucesivamente el 24 entre 3.

$24 \div 3 = 8 \div 3 = 2 \div 3 = 0$ y se tiene un residuo de 1.

Sumamos los cocientes.

$$b = 8 + 2 = 10$$

Si repetimos el procedimiento para cada factor primo, nos queda:

$$24! = 2^{22} \times 3^{10} \times 5^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23$$

5. Datos de vital importancia

1. Fue en China donde se empezó a usar sistemáticamente el mínimo común múltiplo para sumar fracciones.
   https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99
2. La última voluntad de Gauss fue que se grabara en su tumba un heptadecágono. Al día de hoy, no se ha cumplido.
   https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

6. Problemas

1. ¿Qué tipo de enteros n son tales que $\tau(n)$ sea impar?
2. Un entero positivo n tiene exactamente 2 divisores, mientras que el número n + 1 tiene exactamente 3 divisores. ¿Cuántos divisores tiene el número n + 2?
3. Demuestra que, si a y b son primos relativos, entonces $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$.
   Nota: Dos números enteros son primos relativos si en sus descomposiciones canónicas o factorizaciones por primos, no tienen ningún factor en común; por ejemplo, el 4 y el 25 son primos relativos ya que sus factorizaciones son 2^2 y 5^2, respectivamente.
4.
   a. Encuentra todos los enteros positivos menores que 1000 que tengan exactamente tres divisores positivos.
   b. Demuestra que el producto de todos esos enteros es un cuadrado perfecto.
5. Demuestra que, si a y b son primos relativos, entonces $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.
6. Demuestra que si $\sigma(n) = 2n + 1$, entonces n es el cuadrado de un entero impar.
7. Describe a todos los enteros positivos n tales que $\tau(n) = 10$.
8. Encontrar todas los números naturales n tales que $\left(\tau(n)\right)^2 = n$.
9. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n + \tau(n) = \left(\tau(n)\right)^2$.
10. Demuestra que si $\sigma(n) = 2n + 1$, entonces n es el cuadrado de un entero impar.
11. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20!?
12. Halle el número entero de la forma $2^a \times 7^b$, sabiendo que al multiplicarlo por 14 se duplica la cantidad de sus divisores positivos y que, l dividirlo entre 4, el número de sus divisores positivos se reduce a la tercera parte.
13. La suma de divisores de $A - B$ es 93, donde $A = 3^2 \times 5^n$ y $B = 5^n \times 7$. Entonces, ¿a qué sería igual $A + B$?
14. Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.
15. ¿Cuál es la suma de los exponentes de los factores primos de la raíz cuadrada del cuadrado perfecto más grande que divide a $12!$?
16. (OMM, 2019) Un número entero $m \geq 1$ es *mexica* si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es la cantidad de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números mexicas menores a 2019. Nota: los divisores de n incluyen a 1 y a n; por ejemplo $d(12) = 6$, ya que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos los divisores positivos de 12.