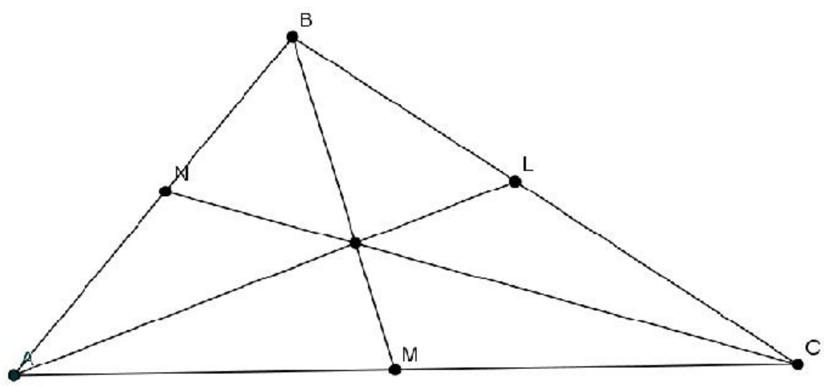
- Teorema de Ceva.

Sean AB,BC,CA los lados del triángulo ABC. Sean l,m,n rectas que pasan por A,B,C respectivamente. Sea L=$BC\bigcap l$, M=$AC\bigcap m$, N=$AB\bigcap n$. Las rectas l,m,n concurren en un punto P <=> $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$



Demostración:

1.a) Si l,m,n concurren en P =>$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$

(ABC) denota el area del triangulo ABC.

Sea h la altura del ΔABC con respecto al lado AC, que es a su vez altura de ΔABM y ΔCBM => (ABM)= $\frac{AM.h}{2}$ y (CBM)=$\frac{MC.h}{2}$ => $\frac{(ABM)}{(CBM)}=\frac{AM}{MC}$ (1)

Realizando el mismo procedimiento para ΔAPM y ΔCPM se tiene que => $\frac{(APM)}{(CPM)}=\frac{AM}{MC}$ (2)

Igualando (1) y (2) tenemos => $\frac{(ABM)}{(CBM)}=\frac{(APM)}{(CPM)}$.

Ahora, utilizaremos la siguiente propiedad de los números reales:

Sean a,b,c,d números reales se cumple que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ => $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

=> $\frac{(ABM)}{(CBM)}=\frac{(APM)}{(CPM)}=\frac{(ABM)-(APM)}{(CBM)-(CPM)}=\frac{(ABP)}{(BCP)}=\frac{AM}{MC}$ (3)

Realizando el mismo procedimiento para los lados AB y BC obtenemos:

$\frac{(ACP)}{(ABP)}=\frac{CL}{LB}$ (4)

$\frac{(BCP)}{(ACP)}=\frac{BN}{NA}$ (5)

$=>$ (3).(4).(5) $=>$ $\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA}=\frac{(ABP)}{(BCP)}\cdot\frac{(ACP)}{(ABP)}\cdot\frac{(BCP)}{(ACP)}=$

$\frac{(ABP)}{(ABP)}\cdot\frac{(ACP)}{(ACP)}\cdot\frac{(BCP)}{(BCP)}=1$. Demostrando así 1.a)

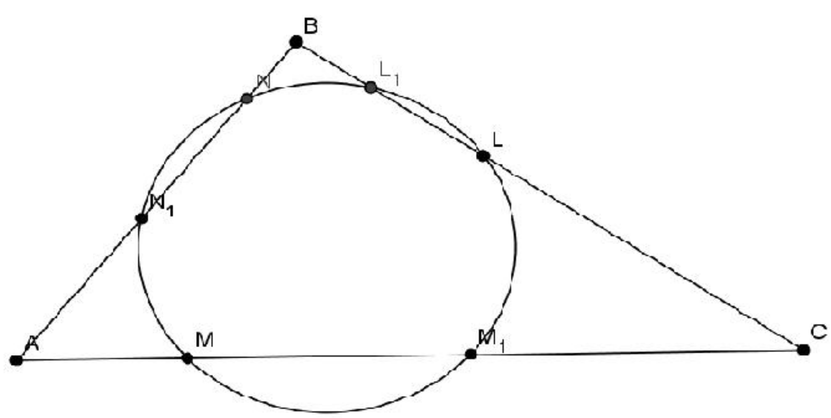
1.b) Si $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$ $=>$ l,m,n concurren en P.

Procedamos por contradicción. Supongamos que l,m,n no concurren en P. Y sea $P=l\bigcap m$, sea $n\acute{}$ una recta por C que pasa por P $=>$ $l,m,n\acute{}$ concurren por lo tanto si $N\acute{}=n\acute{}\bigcap AB$ por 1.a) se tiene: $\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN\acute{}}{N\acute{}A}=1$ (i) y por 1.b) $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$(ii)

$=>$ por (i) y (ii) se tiene: $\frac{BN\acute{}}{N\acute{}A}=\frac{BN}{NA}$ pero N y $N\acute{}$ pertenecen al segmento AB y no hay dos puntos dentro de un segmento que lo partan en razones iguales $=>$ $N=N\acute{}$ $=>$ $n=n\acute{}$ y como $l,m,n\acute{}$ concurren en P $=>$ l,n,m concurren en P. Demostrando así 1.b)

- Problema 1

Sea C una circunferencia y dado un triángulo ΔABC, sean $L,L\acute{},M,M\acute{},N,N\acute{}$ los puntos de corte de C con el triángulo ΔABC sobre los lados BC,CA,AB respectivamente. Demostrar que si AL,BM,CN concurren $=>$ $AL\acute{},BM\acute{},CN\acute{}$ concurren.



Demostración:

Como AL,BM,CN concurren $=>$ por el Teorema de Ceva tenemos: $\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BN}{NA} = 1$ (1)

Por otra parte si $Pc(A)$ denota la potencia de punto de la circunferencia C con respecto al punto A tenemos que

$Pc(A)$=$AN.AN´$=$AM.AM´$ $=>$ $\frac{AM}{NA} = \frac{AN´}{AM´}$ (2)

$Pc(B)$=$BN.BN´$=$BL.BL´$ $=>$ $\frac{BN}{LB} = \frac{BL´}{BN´}$ (3)

$Pc(C)$=$CL.CL´$=$CM.CM´$ $=>$$\frac{CL}{MC} = \frac{CM´}{CL´}$(4)

Para que $AL´$,$BM´$,$CN´$ concurran debe cumplirse que : $\frac{M´C}{AM´}\cdot\frac{L´\mathrm{B}}{CL´}\cdot\frac{N´A}{BN´} = 1$

Realizando (2).(3).(4) $=>$ $\frac{AM}{NA}\cdot\frac{BN}{LB}\cdot\frac{CL}{MC} = \frac{AN´}{AM´}\cdot\frac{BL´}{BN´}\cdot\frac{CM´}{CL´}$=$\frac{M´\mathrm{C}}{AM´}\cdot\frac{\mathrm{LB}´}{CL´}\cdot\frac{N´\mathrm{A}}{BN´}$ y sustiyendo (1) tenemos que: $\frac{M´C}{AM´}\cdot\frac{L´\mathrm{B}}{CL´}\cdot\frac{N´A}{BN´} = 1$ Demostrando así lo que queríamos.

- Problemas Propuestos:

1. Demostrar las siguientes afirmacione usando el Teorema de Ceva.

a) Las medianas de un triangulo concurren

b) Las bisectrices de un triangulo concurren

c) Las alturas de un triangulo concurren.

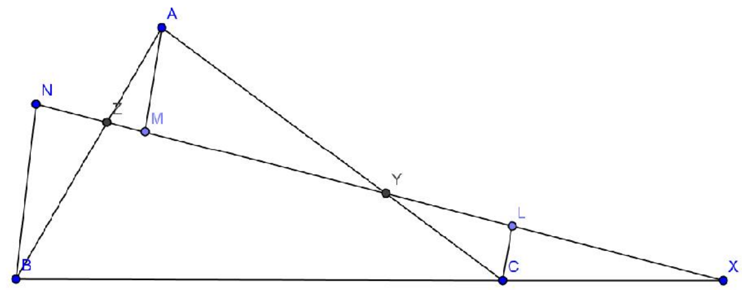
d) La bisectriz interna de un angulo y dos bisectrices extrernas los otros dos angulos concurren.

2. En un triángulo ΔABC la recta obtenida por la reflexión de la mediana del vértica A sobre la bisectriz del $<A$ se llama simediana correspondiente al vértice A. Demostrar que las simedianas en el triángulo ΔABC son concurrentes.

2. Teorema de Menelao

En el ΔABC sean X,Y,Z puntos sobre los lados BC,AC,AB (o sus prolongaciones) respectivamente. Los puntos X,Y,Z son colineales $<=>$ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}$= 1

- Demostración:



- 2.a) Si X, Y, Z son colineales $=>$ $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

Sea l la recta que pasa por los puntos X, Y, Z. Sean L, M, N los pies de las perpendiculares desde C, A, B respectivamente hasta la recta l. Como CL, AM, BN son perpendiculares a l $=>$ $CL//AM//BN$ $=>$ como $CL//BN$ tenemos que : $\Delta BNX \sim \Delta CLX$ $=>$ $\frac{BN}{CL} = \frac{BX}{XC}$ (1)

Como $<BNZ=<AMZ=90°$ y $<NZB=<AZM$ (por ser opuestos por el vértice) $=>$ $\Delta AMZ \sim \Delta BNZ$ $=>$ $\frac{AM}{BN} = \frac{AZ}{ZB}$ (2)

Analogamente como $<AMY=<CLY=90°$ y $<LYC=<MYA$ (por ser opuestos por el vértice) $=>$ $\Delta CLY \sim \Delta AMY$ $=>$ $\frac{CL}{AM} = \frac{CY}{YA}$ (3)

Multiplicando (1).(2).(3) tenemos $=>$
$\frac{BN}{CL} \cdot \frac{AM}{BN} \cdot \frac{CL}{AM} = 1 = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{CY}{YA}$ Demostrando así lo que se quería.

- 2.b) Si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ $=>$ X, Y, Z son colineales

Se X' un punto sobre BC tal que X', Y, Z son colineales. Por 2.a) tenemos que $\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ (i) y pot 2.b) $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ (ii)

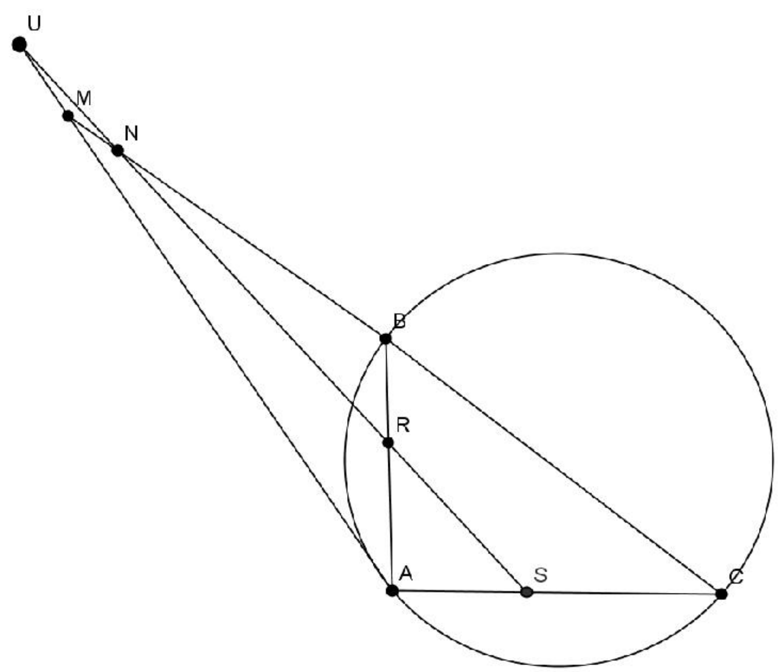
Igualando (i) y (ii) tenemos $\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC}$ pero no existen dos puntos (los dos fuera de BC) que divida a la prolongación de BC en una misma razón $=>$ $X'=X$

$=>$ X, Y, Z son colineales. Demostrando 2.b)

- Problema

En el ΔABC , rectángulo en A, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta AM es tangente a la circunferencia circunscrita en el punto A (M es un punto de BC). S y R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demostrar que el triángulo UMN es isósceles.

- Demostración



El enunciado del problema indica que los puntos U,N,R,S son colineales, sea l la recta que pasa por estos puntos. Por ello podemos aplicar el Teorema de Menelao en los triángulos ΔABC y ΔAMC con respecto a la recta l.

1. Teorema de Menelao en ΔABC: $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$. A su vez se sabe que AS y AR son tangentes al incírculo del ΔABC $=>$ AS=AR $=>$ $\frac{NC}{CS} = \frac{BN}{RB}$ (i)

2. Teorema de Menelao en ΔAMC: $\frac{AU}{UM} \cdot \frac{MN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 => \frac{MN}{UM} = \frac{NC}{CS} \cdot \frac{SA}{AU}$ $=>$ sustituyendo (i) se tiene: $\frac{MN}{UM} = \frac{BN}{RB} \cdot \frac{SA}{AU} = \frac{BN}{AU} \cdot \frac{SA}{RB}$ (ii)

Como AS=AR y $<BAC$=90° $=>$ ΔASR es isósceles y

$<ARS=<ASR=45°=<NRB$ (por ser $<ARS$ y $<NRB$ opuestos por el vértice) $=><ASR=<UAS=<NRB$ (a)

Por otra parte, $<MAC=<MAB+<BAC=<MAB+90°$. Además por ser AM tangente al circuncírculo del ΔABC se cumple que: $<MAB=<BCA =>$

$<MAC=<UAS=<BCA+90°$ (b). Además se tiene que $<MBA=<NBR=<BCA+<BAC=<BCA+90°$ (c).

Igualando (b) y (c) se tiene que $<UAS=<NBR$ (d) $=>$ por (a) y (d) ΔUAS y ΔNBR $=> \frac{BN}{AU} = \frac{BR}{AS} => \frac{BN}{AU} \cdot \frac{SA}{RB} = 1$ (iii)

Sustiyuyendo (iii) en (ii) se tiene: $\frac{MN}{UM} = 1 => MN=UM =>$ ΔUMN es isósceles. Demostrando así lo que se pedía.

- Problemas Propuestos

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si ABC es un triangulo y $AA´$ es su bisectriz externa (con $A´$ sobre BC) entonces $\frac{BA´}{A´C} = \frac{AB}{AC}$.

b) Suponga que las bisectrices internas de B y C cortan a CA y AB en $B´$ y $C´$ respectivamente y que la bisectriz externa de A corta a BC en $A´$ Demuestra que $A´$, $B´$ y $C´$ son colineales.

c) Demuestre que los puntos en los que las bisectrices externas cortan a su lado opuesto correspondiente son colineal

2. Sea ΔABC, se definen los puntos $A´$,$B´$,$C´$ tales que los segmentos $AA´$,$BB´$,$CC´$ son las bisectrices del ΔABC. Sean $A´´$,$B´´$,$C´´$ tales que si las rectas l,m,n son las mediatrices de $AA´$,$BB´$,$CC´$ se tiene que $A´´= l \bigcap BC$, $B´´= m \bigcap AC$, $C´´= n \bigcap AB$. Demuestre que $A´´$,$B´´$,$C´´$ son colineales.