Teoremas de Ceva y Menelao

Entrenamiento #9 para 4ª etapa
12-14 de agosto de 2016
Por: Fernando y Argel

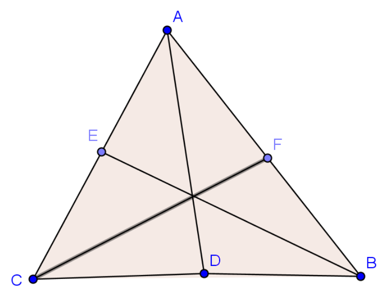
Resumen

Bienvenidos sean de nuevo a Geometría, el área con mayor cantidad de temas en la Olimpiada. En esta ocasión les venimos a hablar de Ceva (se pronuncia "Cheva") y Menelao (se pronuncia como se escribe). Estos Teoremas se utilizan para demostrar concurrencias de líneas o colinealidad de puntos, respectivamente. Hemos de recordar que también funcionan al revés: si hay líneas concurrentes, cumplen con Ceva; si hay puntos colineales, cumplen con Menelao y de ahí puedes obtener algunas propiedades interesantes para el problema.

1. Empecemos con Ceva y algún ejemplo de su aplicación

¿Qué dice Ceva? Este teorema es muy útil para demostrar concurrencia de líneas y nos dice que, dado un triángulo ABC y los puntos D, E y F que se encuentran sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, las líneas AD, BE y CF concurren si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Es muy importante recordar que el teorema de Ceva es un si y sólo si. Es decir, si las líneas concurren se cumple la expresión mostrada, pero también si esta expresión se cumple entonces se puede concluir que las líneas concurren. Esto también implica que se toma una de las condiciones como cierta para probar que la otra también es cierta.

Veamos un ejemplo: Sea ABC un triángulo tal que los puntos D, E, y F se encuentran sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, de tal manera que $BD = \frac{2}{3}BC$, $CE = 5$ y $EA = 2AF$. ¿Cuánto debe medir FB para que las rectas AD, BE y CF sean concurrentes?

Ok, comencemos. ¿Qué herramienta podemos usar para este problema? Cof cof, Teorema de Ceva (claramente, pues es el tema de este entrenamiento). Para que esas cevianas sean concurrentes, simplemente debe cumplirse

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Por los datos del problema, tenemos que $\frac{BD}{DC} = 2$, y aplicando esto en el Teorema de Ceva:

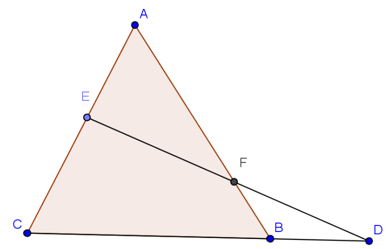
$$1 = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 2 \cdot \frac{5}{2AF} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{5}{FB}$$

De aquí es fácil ver que $FB = 5$.

2. Sigamos con Menelao (y su ejemplo)

¿Qué dice Menelao? Dados un triángulo ABC, y los puntos D, E y F que se encuentran en BC, AC y AB, respectivamente, decimos que los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Veamos un ejemplo: Sea ABC un triángulo con D sobre la prolongación de BC por C, E el punto medio de CA y F sobre AB. Si D, E y F se encuentran sobre una misma recta, muestre que CF y AD se intersectan en algún punto del plano.

Este problema podría sonar difícil, pero nuestro gran amigo Menelao puede acabar con este problema en un dos por tres. El que D, E y F se encuentran sobre una misma recta en pocas palabras quiere decir que son colineales... ¡TEOREMA DE MENELAO! Recordemos que es un si y sólo si, por lo que en vez de buscar razones que multiplicados den 1, ya obtenemos esas razones a partir de la colinealidad de los puntos. Tenemos:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

y como E es el punto medio de CA, tenemos que $\frac{CE}{EA} = 1$, entonces la igualdad anterior se transforma en $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, de donde $\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{FA}$.

Supongamos que CF y DA no se intersectan... eso implicaría que son paralelas, ¿no? Entonces se debe cumplir, por el Teorema de Tales en el triángulo ABD, que $\frac{BC}{CD} = \frac{BF}{FA}$, pero por la expresión anterior tenemos que $\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DC}$, entonces se obtiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{CD}$. De aquí se puede ver que... ¿$BD = BC$? Eso es una total contradicción, ya que D y C son puntos distintos. Por lo tanto, nuestra hipótesis de que CF y DA eran paralelas no es posible, por lo tanto, se intersectan en algún punto.

Podrán ver que el Teorema de Ceva y el Teorema de Menelao tienen utilidad en problemas que pueden parecer complejos o con ausencia de datos. No es una herramienta que puedan aplicar siempre de manera tan directa, por lo que es necesario que practiquen con la mayor cantidad de problemas posible. Además, les invitamos a que demuestren estos dos teoremas. ¿Cómo? Hay muchas maneras de demostrarlos, y de manera general estos son los tips que pueden ayudarles no sólo ahora sino también en exámenes de la Olimpiada:

1. Trazar una paralela y/o prolongar segmentos.
2. El tener razones de segmentos puede referirse a razones de áreas, Teorema de Tales y muchas otras cosas bonitas.
3. Recuerden que si dos triángulos comparten altura, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases.
4. Si dos triángulos comparten una base, la razón entre sus alturas es igual a la razón entre sus áreas.
5. Al trabajar con razones, querrán recordar este lema utilizado en otros entrenamientos (por ejemplo, en el de Teorema de la Bisectriz): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
6. O el Teorema de la Bisectriz mismo (podría ser la versión generalizada también)
7. Ley de senos puede serte útil, más recordando que $\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha) = \cos(90 - \alpha)$

3. ¡Y las versiones trigonométricas!

Colocando los puntos de la misma manera que en el teorema de Ceva, AD, BE y CF concurren si y sólo si

$$\frac{\sin\measuredangle ACF}{\sin\measuredangle FCB}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle EBA}=1$$

Colocando los puntos de igual manera que en el teorema de Menelao, D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{\sin\measuredangle ACF}{\sin\measuredangle FCB}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle EBA}=-1$$

Nótese que hay un -1. Sin embargo, para propósitos de la Olimpiada nos interesa principalmente el valor absoluto; el -1 sería importante si también se considerara la dirección de los segmentos o los ángulos.

4. Unos cuantos ejercicios

1. Demuestra que las medianas son concurrentes.
2. Sean BE, AD y CF líneas tales que dividen a un triángulo en $AE = 12$, $EC = 6$, $CD = 7$, $DB = 10$, $BF = 5$, $FA = 7$. Demuestra que BE, AD y CF son concurrentes.
3. Sea ABC un triángulo con lados AB, AC, BC que tienen longitudes 13, 14, 15, respectivamente. Si CF, AD y BE concurren y $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{5}$ y $\frac{CE}{EA}=\frac{5}{8}$, encuentra el valor de BD y DC.
4. Sea ABC un triángulo tal que $\angle B = 90^\circ$, $BC = 3cm$ y $AB = 4cm$. D es un punto en AC tal que $AD = 1cm$, y E es el punto medio de AB. Extienda DE de tal manera que intersecte con CB extendida en F. Encuentre la medida de BF.

5. Agregados culturales

1. Se le llama ceviana a cualquier segmento que una un vértice de un triángulo con el lado opuesto.
2. No existe un equivalente a tal cosa para Menelao. Pobresito.
3. Por tercera vez: tres líneas (o más) son concurrentes si hay un punto que todas las líneas tengan en común.
4. Tres puntos (o más) son colineales si el resultado de unirlos es una línea, en vez de un polígono.
5. Cuando dibujen los problemas y las líneas no concurren en un punto (pero deberían hacerlo), pueden recurrir al teorema del punto grueso
6. Que se armen las Cevas
7. La ardilla Malabar es un tipo de ardilla nativa a la India y es reconocida por ser uno de los tipos de ardilla más grande del mundo, su longitud desde la cola a la cabeza es de tres pies. Además, sus orejas son muy chistosas.

6. Lista de problemas

1. Demuestra el Teorema de Ceva
2. Demuestra el Teorema de Menelao
3. Demuestra Ceva Trigonométrico

4. Demuestra Menelao Trigonométrico

5. Demuestra que las bisectrices concurren

6. Demuestra que las alturas concurren

7. Las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior, son concurrentes.

8. Las bisectrices externas intersecan los lados opuestos en tres puntos colineales.

9. Las tangentes al circuncírculo por A, B y C intersectan los lados opuestos en tres puntos colineales

10. Sea P un punto sobre la mediana AD de un triángulo ABC. Sean M y N los puntos donde los rayos CP y BP cortan a los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que MN es paralelo a BC.

11. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.

12. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que
$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1$$

13. **(Teorema de Van Aubel)** Sean los puntos L, M y N en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CM concurren en O, demostrar que
$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$$

14. Sean C_1, C_2, C_3 tres circunferencias de centros A, B y C, y radios a, b y c, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos donde se intersectan las tangentes externas comunes de C_1 y C_2, C_2 y C_3 y C_3 y C_1, respectivamente. Demuestra que P, Q y R son colineales.

15. Sea ABC un triángulo, I su incentro y ω su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a ω en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que
$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$$
Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre ω.

16. (**OMM 2010**) Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a C_1 en B y secante a C_2 en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersectar a C_2 en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre C_2 que no contiene a E y sea H la intersección de BF con C_2. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

17. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H, y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90°$.

18. Sean AD, BE, CF tres cevianas concurrentes del triángulo ABC, y sea ω la circunferencia que pasa por D, E, F tal que corte a los lados BC, CA, AB nuevamente en $D^{'}$, E' F'. Demuestra que AD', BE' y CF' son concurrentes.

19. Dos paralelogramos $ACBD$ y $A'CB'D'$ tienen un ángulo común en C. Demuestra que DD', $A'B$ y AB' son concurrentes.

20. Si P, Q, R son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, de tal forma que AP, BQ y CR son concurrentes, y si QR, RP, PQ cortan a BC, CA y AB en P', Q', R' son colineales.

21. En el problema anterior, demuestra que AP, BQ' y CR' son concurrentes.

22. (**Punto de Gergonne**) Si D, E, F son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, CA, AB, respectivamente, entonces AD, BE, CF concurren.

23. (**Punto de Nagel**) Sean D, E, F los puntos de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, tales que D esté a la mitad del perímetro a partir de A, E en la mitad a partir de B y F en la mitad a partir de C. Entonces las líneas AD, BE y CF concurren.

24. (**Teorema de Pascal**) Sean A, B, C, D, E, F puntos sobre una misma circunferencia. Sean P, Q, R los puntos de intersección de AB con DE, BC, con EF y CD con FA, respectivamente. Entonces los puntos P, Q y R son colineales.

25. (**Teorema de Newton**) Un círculo está inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, tocando a los lados AB, BC, CD, DA con los puntos E, F, G y H respectivamente. Entonces las líneas AC, EG, BD, FH concurren

26. (**Teorema de Desargues**) Si se tienen dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de manera que las líneas AA', BB' yCC' concurren en un punto O, entonces los puntos P, Q y R son colineales, en donde P, Q, R son los puntos de intersección de BC con $B'C'$, CA con $C'A'$ y AB con $B'A'$. (El converso también es cierto).

27. (**Teorema de Pappus**) Si A, C, E son tres puntos en una recta. B, D y F son tres puntos en otra recta, Si AB, CD y EF cortan a las rectas DE, FA y BC, respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M, N son colineales.

28. (**Teorema de Brianchon**) Las líneas AB, BC, CD, DE, EF y FA son tangentes a un circulo en los puntos G, H, I, J, K y L. Demuestra que las líneas AD, BE, CF concurren.

29. Sea A la proyección del centro de una circunferencia sobre una recta dada ℓ. Consideremos los puntos B y C en ℓ de manera que $AB = AC$. Por B y C se trazan dos secantes arbitrarias a la circunferencia, las cuales la cortan en los puntos P, Q y M, N, respectivamente. Supongamos que las rectas NP y MQ cortan la recta ℓ en los puntos R y S. Demuestra que $RA = AS$.

30. Si se construyen los triángulos equiláteros BCA', CAB', ABC' exteriormente sobre los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, demuestra que AA', BB', CC' son concurrentes en un punto P.

31. Sea $ABCD$ un paralelogramo y P un punto cualquiera. Por P trácense rectas paralelas a BC y a AB hasta que corten a BA y a CD en G y H, y a AD y BC en E y F. Demuestra que las rectas diagonales EG, HF,DB son concurrentes.

32. **(OMMBC 2009)** Sea G el gravicentro del triángulo $\triangle ABC$ y M el punto medio del lado BC. Sean X y Y dos puntos sobre AB y AC respectivamente de manera que el segmento XY sea paralelo a BC y pase por G. Sean P y Q las intersecciones de XC con GB y YB con GC respectivamente. Demuestra que el triangulo $\triangle MPQ$ es semejante al triangulo $\triangle ABC$.

33. **(Ibero, 2015)** En el triángulo acutángulo $\triangle ABC$ el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente.Demuestre que
$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$