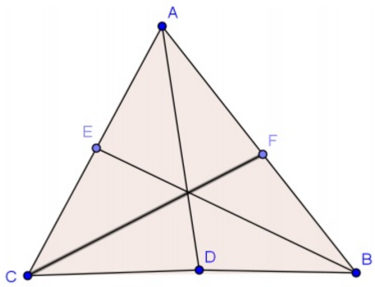
Entrenamiento de Geometría

Israel Bonal Rodríguez

Sábado 17 de Octubre de 2020

Teorema de Ceva: Dado un triángulo ABC y los puntos D, E y F que se encuentran sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, las líneas AD, BE y CF concurren si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Teorema de Ceva trigonométrico: En la figura anterior; AD, BE y CF concurren si y sólo si

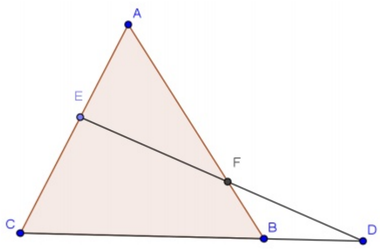
$$\frac{\text{sen}(\measuredangle ACF)}{\text{sen}(\measuredangle FCB)} \cdot \frac{\text{sen}(\measuredangle BAD)}{\text{sen}(\measuredangle DAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\measuredangle CBE)}{\text{sen}(\measuredangle EBA)} = 1$$

Corolario: Las medianas, alturas, bisectrices y simedianas de un triángulo concurren.

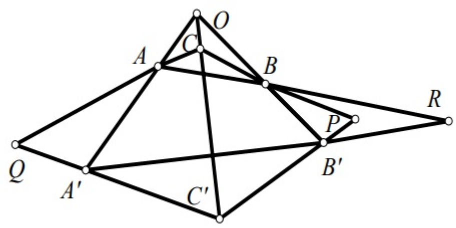
Teorema de Menelao: Dados un triángulo ABC, y los puntos D, E y F que se encuentran en BC, AC y AB, respectivamente, decimos que los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Nota importante: En realidad la igualdad anterior es -1 si se considera la dirección de los segmentos.



Teorema de Desargues: Si se tienen dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de manera que las líneas AA', BB' y CC' concurren en un punto O, entonces los puntos P, Q y R son colineales, en donde P, Q, R son los puntos de intersección de BC con $B'C'$, CA con $C'A'$ y AB con $B'A'$. (El converso también es cierto).



Teorema de Pappus: Si A, B, C son tres puntos en una recta. D, E y F son tres puntos en otra recta, Si AE, AF y BF cortan a las rectas BD, DC y EC, respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M, N son colineales.

Problemas:

1) Las bisectrices externas intersecan los lados opuestos en tres puntos colineales.
2) Las tangentes al circuncírculo por A, B y C intersectan los lados opuestos en tres puntos colineales.
3) Sea P un punto sobre la mediana AD de un triángulo ABC. Sean M y N los puntos donde los rayos CP y BP cortan a los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que MN es paralelo a BC.
4) Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.
5) Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que
$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1$$
6) **(Teorema de Van Aubel)** Sean los puntos L, M y N en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que
$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$$
7) Sean C_1, C_2, C_3 tres circunferencias de centros A, B y C, y radios a, b y c, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos donde se intersectan las tangentes externas comunes de C_1 y C_2, C_2 y C_3 y C_3 y C_1, respectivamente. Demuestra que P, Q y R son colineales.
8) Sea ABC un triángulo, I su incentro y ω su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a ω en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE < \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre ω.
9) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersectar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.
10) Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H, y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\measuredangle ANH = 90°$.
11) Sean AD, BE, CF tres cevianas concurrentes del triángulo ABC, y sea ω la circunferencia que pasa por D, E, F tal que corte a los lados BC, CA, AB nuevamente en D', E', F'. Demuestra que AD', BE' y CF' son concurrentes.
12) Dos paralelogramos $ACBD$ y $A'CB'D'$ tienen un ángulo común en C. Demuestra que $DD', A'B$ y AB' son concurrentes.
13) Sea G el gravicentro del triángulo ABC y M el punto medio del lado BC. Sean X y Y dos puntos sobre AB y AC respectivamente de manera que el segmento XY sea paralelo a BC y pase por G. Sean P y Q las intersecciones de XC con GB y YB con GC respectivamente. Demuestra que el triángulo MPQ es semejante al triangulo ABC.
14) Sean Z, Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB, CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado BC, corta a CA en N. Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.
15) En el triángulo acutángulo ABC el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente.Demuestre que
$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$

Teorema de Pascal: Sean A, B, C, D, E, F puntos sobre una misma circunferencia. Consideramos P, Q, R los puntos de intersección de AB con DE, BC con EF y CD con FA, respectivamente. Entonces los puntos P, Q y R son colineales

Una manera de recordar este resultado sería colocando los nombres de los puntos en la circunferencia sobre un circulo (también podemos considerarlos sobre una fila $ABCDEF$ de tal modo que los extremos A y F son adyacentes) y tomar la intersección de las rectas que definen dos parejas de puntos que no son adyacentes. Entonces los puntos de intersección que determinan estas tres rectas son colineales. En este caso, cada una de las tres parejas con dos puntos: (A, B) y (D, E), (B, C) y (E, F), (C, D) y (F, A); no son adyacentes por lo que cada una determina un punto que conformará la colinealidad en el teorema de Pascal.

Nota importante: Esto no quiere decir que los puntos sobre la circunferencia tienen que estar necesariamente en orden cíclico. El teorema de Pascal se vale para cualesquiera 6 puntos en una misma circunferencia, y estos pueden repetirse. Para este caso, si a un punto en una circunferencia Γ lo nombramos de dos formas distintas A y B, la recta AB que determina a este punto corresponde a la recta tangente a Γ por ese punto.

Problemas:

1) El cuadrilátero cíclico $ABCD$ es tal que las tangentes al circulo por B y D se intersectan en AC. Demuestra que las tangentes al circulo desde A y C se intersectan en BD.

2) Sean D y E los puntos medios de los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ del circuncirculo del triángulo ABC, respectivamente. Sea P un punto sobre el arco menor $\widehat{BC}$, $Q = DP \cap BA$ y $R = PE \cap AC$. Demuestra que la recta QR pasa por el incentro de ABC.

3) Para el circuncirculo del triángulo ABC, sea D la intersección de la recta tangente en A con la recta BC, E la intersección de la recta tangente en B con la recta AC y F la intersección de la recta tangente en C con la recta AB. Demuestra que D, E y F son colineales.

4) **(Teorema de Newton)** Un círculo está inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, tocando a los lados AB, BC, CD, DA con los puntos E, F, G y H respectivamente. Entonces las líneas AC, EG, BD, FH concurren.

5) Sea ω y O el circuncirculo y circuncentro de un triángulo rectángulo ABC con $\angle B = 90°$. Sea $P \neq A$ un punto en la tangente a ω por A y suponemos que el rayo PB intersecta de nuevo a ω en D. El punto E sobre la recta CD cumple $AE||BC$. Demuestra que P, O, E son colineales.

6) Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia Γ. Sea X otro punto en Γ y sea R un punto en el plano distinto a todos los anteriores. Las rectas AR, BR, CR intersecan a Γ de nuevo en A_0, B_0, C_0 respectivamente. Sean A_1 la intersección de las rectas AX y B_0C_0; B_1 la intersección de las rectas BX y C_0A_0; y C_1 la intersección de las rectas CX y A_0B_0. Demostrar que A_1, B_1 y C_1 son colineales.

7) Sea ABC un triángulo y sea I su incentro. La circunferencia Ω es tangente a AB en X, a AC en Y y a la circunferencia circunscrita de ABC. Demostrar que I es el punto medio de XY.

8) En un cuadrado $ABCD$, sea P un punto del lado CD, distinto de C y D. En el triángulo ABP se trazan las alturas AQ y BR, y sea S el punto de intersección de las rectas CQ y DR. Demuestre que $\angle ASB = 90°$.

9) El segmento AB es tangente al circulo ω en el punto $Y \neq A, B$. El punto X está sobre el circulo ω tal que XY es un diámetro. Supongamos que XA y XB cortan al circulo nuevamente en C y D, respectivamente, y que AD y BC cortan al circulo de nuevo en E y F, respectivamente. Demuestra que $XE = XF$.

10) Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Sean P_1 y P_2 los pies de las perpendiculares desde P a los lados AC y BC, respectivamente. Sean Q_1 y Q_2 los pies de la perpendiculares desde C a las rectas AP y BP, respectivamente. Si $Q_2 \neq P_1$ y $Q_1 \neq P_2$, prueba que las rectas P_1Q_2, Q_1P_2 y AB son concurrentes.