

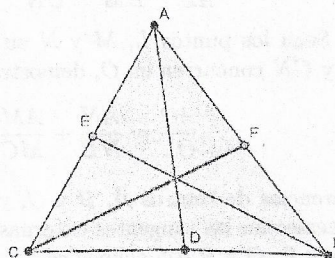
Entrenamiento de Geometría

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato 2019

25, 26 y 27 de Octubre de 2019

Teorema de Ceva: Dado un triángulo ABC y los puntos D , E y F que se encuentran sobre los lados BC , CA y AB respectivamente, las líneas AD , BE y CF concurren si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Teorema de Ceva trigonométrico: En la figura anterior; AD , BE y CF concurren si y sólo si

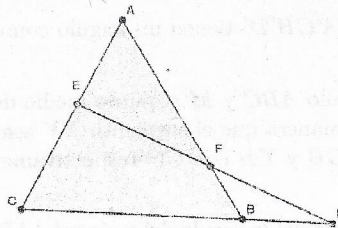
$$\frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle FCB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle EBA)} = 1$$

Corolario: Las medianas, alturas, bisectrices y simedianas de un triángulo concurren.

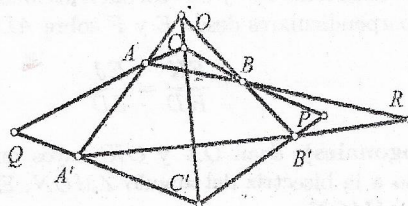
Teorema de Menelao: Dados un triángulo ABC , y los puntos D , E y F que se encuentran en BC , AC y AB , respectivamente, decimos que los puntos D , E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Nota importante: En realidad la igualdad anterior es -1 si se considera la dirección de los segmentos.



Teorema de Desargues: Si se tienen dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de manera que las líneas AA' , BB' y CC' concurren en un punto O , entonces los puntos P , Q y R son colineales, en donde P , Q , R son los puntos de intersección de BC con $B'C'$, CA con $C'A'$ y AB con $A'B'$. (El converso también es cierto).



Teorema de Pappus: Si A, B, C son tres puntos en una recta. D, E y F son tres puntos en otra recta. Si AE, AF y BF cortan a las rectas BD, DC y EC , respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M, N son colineales.

Problemas:

- 1) Las bisectrices externas intersecan los lados opuestos en tres puntos colineales.
- 2) Las tangentes al circuncírculo por A, B y C intersecan los lados opuestos en tres puntos colineales.
- 3) Sea P un punto sobre la mediana AD de un triángulo ABC . Sean M y N los puntos donde los rayos CP y BP cortan a los lados AB y AC , respectivamente. Demuestra que MN es paralelo a BC .
- 4) Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC , y si BQ y CP se cortan en O , demuestra que AO es una mediana.
- 5) Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O , demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1$$

- 6) (**Teorema de Van Aubel**) Sean los puntos L, M y N en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O , demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$$

- 7) Sean C_1, C_2, C_3 tres circunferencias de centros A, B y C , y radios a, b y c , respectivamente. Sean P, Q y R los puntos donde se intersecan las tangentes externas comunes de C_1 y C_2, C_2 y C_3 y C_3 y C_1 , respectivamente. Demuestra que P, Q y R son colineales.
- 8) Sea ABC un triángulo, I su incentro y ω su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a ω en D . Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Sea G el punto medio del segmento IF . Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre ω .
- 9) Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A . Se traza una recta tangente a C_1 en B y secante a C_2 en C y D ; luego se prolonga el segmento AB hasta intersectar a C_2 en un punto E . Sea F el punto medio del arco CD sobre C_2 que no contiene a E y sea H la intersección de BF con C_2 . Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.
- 10) Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC . La circunferencia que pasa por B, H , y C corta a la mediana AM en N . Muestra que $\angle ANH = 90^\circ$.
- 11) Sean AD, BE, CF tres cevianas concurrentes del triángulo ABC , y sea ω la circunferencia que pasa por D, E, F tal que corte a los lados BC, CA, AB nuevamente en D', E', F' . Demuestra que AD', BE' y CF' son concurrentes.
- 12) Dos paralelogramos $ACBD$ y $A'CB'D'$ tienen un ángulo común en G . Demuestra que $DD', A'B$ y AB' son concurrentes.
- 13) Sea G el gravicentro del triángulo ABC y M el punto medio del lado BC . Sean X y Y dos puntos sobre AB y AC respectivamente de manera que el segmento XY sea paralelo a BC y pase por G . Sean P y Q las intersecciones de XC con GB y YB con GC respectivamente. Demuestra que el triángulo MPQ es semejante al triángulo ABC .
- 14) Sean Z, Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB, CA , respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado BC , corta a CA en N . Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K . Muestra que $KA = NC$.
- 15) En el triángulo acutángulo ABC el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC . Sea P un punto en el segmento AD . Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$

Definición (Conjugados isogonales): Sean OX y OX' rayos que pasan por el vértice O del ángulo $\angle MON$ simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo $\angle MON$. Entonces OX y OX' se llaman par de rectas isogonales para el ángulo $\angle MON$.

Definición (Simediana): Sea ABC un triángulo y M el punto medio de BC . Llamamos simediana de ABC trazada desde A a la recta isogonal de AM para el ángulo $\angle BAC$.

Proposición: Sea ABC un triángulo, M el punto medio del lado BC y M' un punto sobre el lado BC . Denotemos $AC = b$ y $AB = c$. Entonces AM' es simediana del triángulo ABC trazada desde A si y solo si

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c^2}{b^2}$$

Proposición: Sea ABC un triángulo y M' un punto en BC . Entonces AM' es simediana del triángulo ABC si y solo si

$$\frac{\sin(\angle BAM')}{\sin(\angle CAM')} = \frac{AB}{AC}$$

Proposición: Sean ABC un triángulo y Ω su circuncírculo. Sea P el punto donde las rectas tangentes a Ω , en B y C , se intersecan. Entonces, la recta AP es la simediana del triángulo ABC trazada desde A .

Proposición: Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω . La recta tangente a Ω en A interseca a la recta BC en D . Desde D se traza otra recta tangente a Ω , además de AD , la cual interseca a Ω en E . Entonces, AE es la simediana del triángulo ABC trazada desde A .

Proposición: Sea ABC un triángulo. Se escogen puntos D y E sobre las rectas AB y AC , respectivamente (los puntos son distintos de B y C). Entonces la simediana del triángulo ABC trazada desde A biseca al segmento DE si y solo si los puntos D, B, C y E son concíclicos.

Proposición: Sean ABC un triángulo y M un punto sobre el segmento BC . Se escoge un punto D sobre la recta AB tal que el circuncírculo del triángulo BCD es tangente a AC . Entonces, AM es la simediana del triángulo ACD si y solo si M es el punto medio de BC .

Problemas:

- 1) La recta ℓ es perpendicular al segmento AB y pasa por B . La circunferencia con el centro situado en ℓ pasa por A y corta a ℓ en los puntos C y D . Las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N . Demuestra que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.
- 2) Sea N el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC trazadas por los puntos B y C . Sea M un punto en la circunferencia de tal manera que AM es paralelo a BC y sea K el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demuestra que KA divide BC por la mitad.
- 3) Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\angle DAB = \angle ABC < 90^\circ$. La recta por D y el punto medio de BC interseca a la recta AB en un punto E . Demuestra que $\angle BEC = \angle DAC$.
- 4) Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC , y los ángulos en A y B rectos. Sea M el punto medio de AB y el ángulo $\angle CMD = 90^\circ$. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M , P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC . Demuestra que el ángulo $\angle AKB$ es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1$$

- 5) Desde un punto A exterior a una circunferencia están trazadas las tangentes AM y AN . También desde A se traza una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L . Trazamos una recta arbitraria ℓ paralela a AM . Supongamos que KM y LM cortan ℓ en los puntos P y Q . Demuestra que la recta MN divide el segmento PQ por la mitad.
- 6) Sea AD una altura de un triángulo ABC . Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y AC en K y L , respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersecan en un punto M . Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.
- 7) El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Los pies de las perpendiculares desde D hacia las líneas AB, BC, CA , son P, Q, R , respectivamente. Demuestra que las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CDA$ se intersecan sobre la línea AC si y sólo si $RP = RQ$.
- 8) Desde A se trazan tangentes AB y AC a una circunferencia; sea PQ un diámetro; ℓ una línea tangente a la circunferencia en Q . Las líneas PA, PB y PC intersecan en A_1, B_1 y C_1 . Demuestra que $A_1B_1 = A_1C_1$.

- 9) Sea ω el circuncírculo del $\triangle ABC$. T es la intersección de las líneas que son tangentes a ω en B y C . AT corta BC en M . Sean P y Q puntos en AB y AC tales que MP es paralela a AC y MQ es paralela a AB . Demuestra que $BCQP$ es un cuadrilátero cíclico.
- 10) Dos circunferencias se intersectan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N . Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA , respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.

Teorema: Si BP y BQ son conjugadas isogonales del ángulo CBA del triángulo ABC , y también CP y CQ son conjugadas isogonales para el ángulo ACB , entonces AQ y AP son conjugadas isogonales para el ángulo BAC .

Teorema de Pascal: Sean A, B, C, D, E, F puntos sobre una misma circunferencia. Sean P, Q, R los puntos de intersección de AB con DE , BC con EF y CD con FA , respectivamente. Entonces los puntos P, Q y R son colineales.

Problemas:

- 1) El cuadrilátero cíclico $ABCD$ es tal que las tangentes al círculo por B y D se intersectan en AC . Demuestra que las tangentes al círculo desde A y C se intersectan en BD .
- 2) Sean D y E los puntos medios de los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ del circuncírculo del triángulo ABC , respectivamente. Sea P un punto sobre el arco menor $\widehat{BC}$, $Q = DP \cap BA$ y $R = PE \cap AC$. Demuestra que la recta QR pasa por el incentro de ABC .
- 3) Para el circuncírculo del triángulo ABC , sea D la intersección de la recta tangente en A con la recta BC , E la intersección de la recta tangente en B con la recta AC y F la intersección de la recta tangente en C con la recta AB . Demuestra que D, E y F son colineales.
- 4) (**Teorema de Newton**) Un círculo está inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, tocando a los lados AB, BC, CD, DA con los puntos E, F, G y H respectivamente. Entonces las líneas AC, EG, BD, FH concurren.
- 5) Sea ω y O el circuncírculo y circuncentro de un triángulo rectángulo ABC con $\angle B = 90^\circ$. Sea $P \neq A$ un punto en la tangente a ω por A y suponemos que el rayo PB intersecta de nuevo a ω en D . El punto E sobre la recta CD cumple $AE \parallel BC$. Demuestra que P, O, E son colineales.
- 6) Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia Γ . Sea X otro punto en Γ y sea R un punto en el plano distinto a todos los anteriores. Las rectas AR, BR, CR intersecan a Γ de nuevo en A_0, B_0, C_0 respectivamente. Sean A_1 la intersección de las rectas AX y B_0C_0 ; B_1 la intersección de las rectas BX y C_0A_0 ; y C_1 la intersección de las rectas CX y A_0B_0 . Demostrar que A_1, B_1 y C_1 son colineales.
- 7) Sea ABC un triángulo y sea I su incentro. La circunferencia Ω es tangente a AB en X , a AC en Y y a la circunferencia circunscrita de ABC . Demostrar que I es el punto medio de XY .
- 8) En un cuadrado $ABCD$, sea P un punto del lado CD , distinto de C y D . En el triángulo ABP se trazan las alturas AQ y BR , y sea S el punto de intersección de las rectas CQ y DR . Demuestre que $\angle ASB = 90^\circ$.
- 9) El segmento AB es tangente al círculo ω en el punto $Y \neq A, B$. El punto X está sobre el círculo ω tal que XY es un diámetro. Supongamos que XA y XB cortan al círculo nuevamente en C y D , respectivamente, y que AD y BC cortan al círculo de nuevo en E y F , respectivamente. Demuestra que $XE = XF$.
- 10) Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Sean P_1 y P_2 los pies de las perpendiculares desde P a los lados AC y BC , respectivamente. Sean Q_1 y Q_2 los pies de la perpendiculares desde C a las rectas AP y BP , respectivamente. Si $Q_2 \neq P_1$ y $Q_1 \neq P_2$, prueba que las rectas P_1Q_2, Q_1P_2 y AB son concurrentes.