Primer Entrenamiento Especial de Geometría

Israel Bonal Rodríguez

Sábado 25 de Enero de 2020

Trazos Auxiliares:

Resulta que algunos trazos pueden simplificar la solución de un problema que aparentemente es complicado. De hecho, algunas veces el trazo dibujado nos muestra cuál es el camino hacia la solución (o al menos uno de los caminos). Las estrategias en geometría más comunes y que nos pueden ayudar de forma significativa en la solución de un problema son las siguientes:

1. Prolongación de segmentos.
2. Trazo de paralelas y perpendiculares.
3. Trazo de tangentes y cuerdas comunes de circunferencias.
4. Construcción de ángulos.
5. Circunferencias auxiiliares.

Ejemplo 1: En un triángulo $\triangle ABC$ se cumple que $\angle BAC = 100°$ y $AB = AC$. Se elige un punto D en el lado AC de modo que $\angle ABD = \angle CBD$. Entonces $AD + DB = BC$.

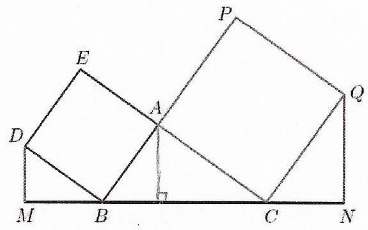
Ejemplo 2: En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilatero convexo se toman los puntos M y N, de tal manera que $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Entonces la recta MN es paralela a la bisectriz del angulo formado por los lados AB y CD.

Ejemplo 3: En el plano se encuentra dibujado un triángulo acutángulo escaleno ABC, en el que BC es el lado mayor. Se construyen puntos P y D, el primero en el interior de ABC y el segundo en el exterior, de manera que $\angle ABC = \angle CBD$, $\angle ACP = \angle BCD$ y que el área del triángulo ABC es igual al área del cuadrilátero $BPCD$. Entonces los triángulos BCD y ACP son semejantes.

Problemas propuestos:

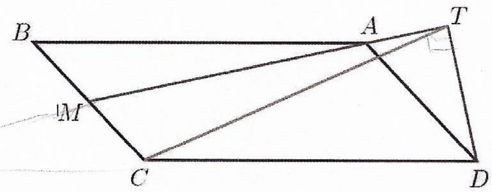
1) En un triángulo ABC se trazan las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$ y éstas intersectan los lados AC y AB en los puntos E y D, respectivamente. Consideramos los puntos P y Q sobre las líneas CD y BE, respectivamente, de manera que $AP \perp CD$ y $AQ \perp BE$. Demuestra que PQ es paralelo a BC.

2) Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Se construyen los cuadrados $ABDE$ y $CAPQ$ como se muestra en la figura siguiente. Se trazan las perpendiculares DM y QN hacia el lado BC. Demuestra que $DM + QN = BC$.



3) Se escoge un punto D en el interior de un triángulo escaleno $\triangle ABC$ de tal manera que el ángulo $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ y $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Encuentra $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

4) En un paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio de BC. DT es dibujada desde D y perpendicular a MA, como se muestra en la figura. Demuestra que $CT = CD$.



5) En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales AC y BD son perpendiculares y los lados opuestos AB y DC no son paralelos. El punto P, intersección de las mediatrices de AB y DC, está en el interior del cuadrilátero $ABCD$. Demuestra que los vértices de $ABCD$ están en una misma circunferencia si y sólo si los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle CDP$ tienen áreas iguales.

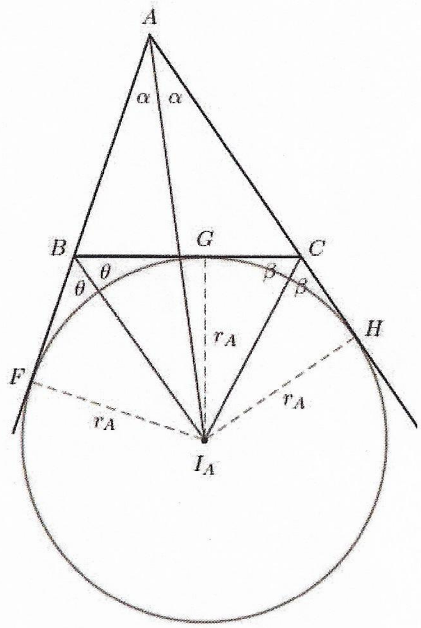
6) Sean P y Q puntos en el interior de un triángulo $\triangle ABC$ tales que $\angle PAB = \angle QAC$ y $\angle PBA = \angle QBC$. Encuentra:

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{AC \cdot BC}$$

Excírculos:

Dado un triángulo existen 4 circunferencias que son tangentes a sus lados. Una de éstas, es la circunferencia inscrita, la cual tiene contacto con los lados en el interior. Sin embargo, si permitimos que las circunferencias tengan contacto con las prolongaciones de los lados, entonces tenemos tres posibilidades más. Estas circunferencias tienen contacto con uno de los lados en su interior y con los dos lados restantes en sus prolongaciones, y se les conoce con el nombre de circunferencias exinscritas o excírculos. Veamos como se determinan:

Sea I_A el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo $\angle A$ y la bisectriz exterior del ángulo $\angle C$. Como I_A pertenece a la bisectriz interior del ángulo $\angle A$, entonces equidista de los lados AB y AC, pero como también pertenece a la bisectriz exterior del ángulo $\angle C$ entonces equidista de los lados BC y AC. Lo anterior quiere decir que el punto I_A equidista de los lados AB y BC, esto es, que la bisectriz exterior del ángulo $\angle B$ pasa por I_A, por lo tanto la bisectriz interior del ángulo $\angle A$ y las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ concurren en un punto, al cual se le llama el excentro con respecto al vértice A y es denotado comúnmente como I_A. Sean F, G, y H los pies de las perpendiculares desde I_A hacia los lados AB, BC, y CA.



Consideremos la distancia I_AG como radio e I_A como centro y trazemos una circunferencia la cual es tangente a AB, BC, y CA en los puntos F, G, y H. Esta circunferencia es precisamente la circunferencia exinscrita del lado BC. La distancia I_AG es el exradio y lo denotaremos como r_A. De forma análoga definimos los puntos I_B, I_C y los exradios r_B y r_C. En lo que sigue, denoraremos por r al inradio del triángulo ABC, por s a su semiperímetro y por (ABC) a su área. Además consideraremos $a = BC, b = AC$ y $c = AB$.

Ejemplo 1: En el triángulo ABC se cumple $rs = (ABC) = r_A(s-a) = r_B(s-b) = r_C(s-c)$.

Ejemplo 2: El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Entonces se cumple que $s - a = AM = NC$.

Observación: El triángulo ABC es el triángulo órtico del triángulo $I_AI_BI_C$.

Teorema 1: Sea M el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A en el circuncírculo del triángulo ABC y sea I su incentro. Entonces I, I_A, B, C estan sobre una misma circunferencia centrada en M.

Teorema 2: Sea N el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que contiene a A en el circuncírculo del triángulo ABC. Entonces I_B, I_C, B, C estan sobre una misma circunferencia centrada en N.

Problemas propuestos:

1) Demuestra que:

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}$$

2) Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo ABC de modo que los círculos exinscritos de $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$, con respecto al vértice A, son congruentes. Demuestra que $AD = \sqrt{s(s-a)}$.

3) Demuestra que:

$$\tan\left(\frac{\measuredangle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

4) Demuestra la fórmula de Herón:

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

5) Dado un triángulo ABC, sea S el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto del incírculo con los lados del triángulo. Ahora, sea S_A el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita (con respecto al vértice A) con los lados del triángulo. De manera similar definimos S_B y S_C. Demuestra que:

$$\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} = \frac{1}{S}$$

6) Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \| CD$. La circunferencia inscrita ω del triángulo $\triangle BCD$ intersecta a la recta CD en E. Sea F un punto sobre la bisectriz de $\angle DAC$ tal que $EF \perp CD$. La circunferencia circunscrita del triángulo $\triangle ACF$ corta a la recta CD de nuevo en el punto G. Prueba que el triángulo $\triangle AFG$ es isósceles.

7) Sea ABC un triángulo. Se toman P en AB y Q en AC tal que $BPQC$ es cíclico. La circunferencia circunscrita al triángulo ABQ corta a BC de nuevo en S y la circunferencia circunscrita al triángulo APC corta a BC de nuevo en R. Las rectas PR y QS se intersectan en L. Demuestra que la intersección de AL y BC no depende de la elección de P y Q.

8) En un paralelogramo $ABCD$ se trazan las circunferencias de centros O y O' y radios R y R' exinscritas a los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$, relativas a los lados AD y CD, respectivamente.

   a) Demuestra que las circunferencias son tangentes a BD en un mismo punto F.

   b) Demuestra que D es el ortocentro del triángulo OBO'.

   c) Demuestra que $FB \cdot FD = R \cdot R'$.