Tres tristes tigres...

Material extra
La vastidad de 2017
Por: Lulú

Resumen

Aunque en años pasados le echamos muchas ganas a aumentar el número de temas y la intensidad para prepararlos mejor, estamos de acuerdo en que hay muchos temas que nos faltan por ver. Hay herramientas que no son tan necesarias pero que son buenas como último recurso. Por eso, con toda la tristeza del mundo, te traigo esta lista de geometría ruda. Además, la vez pasada que se tocó este tema, probablemente fue una introducción muy dura.

1. ...tragaban trigo

Sí, me refiero a la siempre odiada y asquerosa trigonometría. Normalmente conocida como "trigo"; ya saben, para los compas. Por su etimología sabemos que significa "medición de los triángulos"; pero, claro, se refiere al "estudio" de las relaciones que hay entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo (a.k.a. todo lo que se le puede medir).

Es claro que los lados de un triángulo se pueden medir y que puedes realizar operaciones con ellos, ¿no? Pero en lo que respecta a los ángulos, que bien se pueden medir, se dificulta hacer algo con ellos. Por eso generalmente se utilizan las llamadas funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante) para trabajar con los ángulos; y, lo creas o no, sí son útiles y te pueden facilitar muchas cosas.

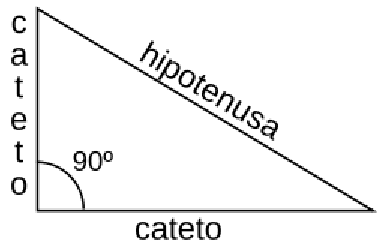
Ahora, si eres muy nuevo en esto, quizá te preguntes qué son esas funciones trigonométricas y con qué se comen. Bueno, continúa leyendo tranquilamente este documento y la verdad aparecerá en tu corazón. Eventualmente. Y espero que sí sea así porque esta es una lista introductoria, básica; esperen una lista con problemas más avanzados, ingeniosos y difíciles posteriormente. Ésta es para que "le agarren la onda".

2. Bienvenido a mi trigal

Estoy contando en este momento con que ya sepas algo de álgebra y que domines despejes y cosas de esas. Hablando de despejes, deja te despejo las dudas que han brotado con el apartado anterior. Primero, hemos de mencionar que las funciones trigonométricas están definidas a partir de triángulos rectángulos.

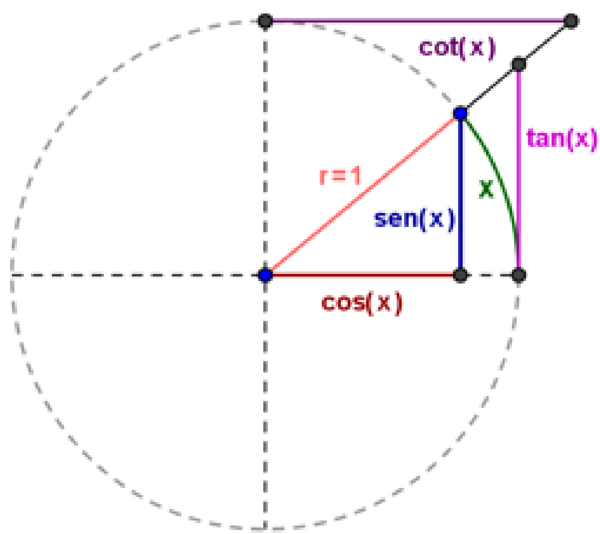
2.1. Las funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo (con un ángulo de 90°) se le conoce como catetos a los dos lados que son perpendiculares e hipotenusa al otro (el opuesto al ángulo recto). Algo como lo que se muestra en la siguiente imagen:



Ambos catetos reciben también los nombres de **cateto opuesto** y **cateto adyacente**, pero eso teniendo algún ángulo como referencia. El cateto opuesto de un ángulo no recto en estos triángulos, es el lado opuesto al ángulo en referencia. Por otra parte, el cateto adyacente a ese ángulo sería el otro cateto; esto se debe a que el ángulo está formado por la hipotenusa y uno de los catetos, entonces el cateto adyacente de ese ángulo es ese cateto.

Ahora, les presento a un influyente e importante amigo llamado **círculo unitario**. Es una circunferencia de radio 1 que nos explicará muchas relaciones trigonométricas de una forma visual. Como se puede ver, hay un ángulo central x que abarca un arco x (marcado en verde). Éste será nuestro ángulo de referencia por el momento.



2.1.1. El seno

El seno de un ángulo está definido como la razón que hay entre el cateto opuesto y la hipotenusa. Es decir: $\sin x = \frac{Co}{Hip}$. Utilizando el círculo unitario, vemos que $\sin x$ es la altura generada con el ángulo x.

2.1.2. El coseno

El coseno de un ángulo está definido como la razón que hay entre el cateto adyacente y la hipotenusa. Es decir: $\cos x = \frac{Ca}{Hip}$. Utilizando el círculo unitario, vemos que $\cos x$ es la base del triángulo rectángulo que se genera con el ángulo x.

2.1.3. La tangente

La tangente de un ángulo está definida como la razón que hay entre el cateto opuesto y el adyacente. Es decir: $\tan x = \frac{Co}{Ca}$.

2.1.4. La cotangente

La cotangente de un ángulo está definida como la razón que hay entre el cateto adyacente y el opuesto. Es decir: $\cot x = \frac{Ca}{Co}$.

2.1.5. La secante

La secante de un ángulo está definida como la razón que hay entre la hipotenusa y el cateto adyacente. Es decir: $\sec x = \frac{Hip}{Ca}$.

2.1.6. La cosecante

La cosecante de un ángulo está definida como la razón que hay entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Es decir: $\csc x = \frac{Hip}{Co}$.

2.2. Los valores fundamentales

Existe un conjunto de valores que tendrías que tener presentes siempre. Y está bien que no te los aprendas, pero sí deberías saber cómo obtenerlos. De un triángulo rectángulo isósceles o de trazar la altura de un equilátero, por ejemplo. Bueno, te presento aquí la tabla, pero debes comprometerte a explicar por qué sucede cada uno de esos valores:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Razón	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Seno	0	½	√2/2	√3/2	1	0
Coseno	1	√3/2	√2/2	½	0	-1
Tangente	0	√3/3	1	√3	No existe	0
Cotangente	No existe	√3	1	√3/3	0	No existe
Secante	1	2√3/3	√2	2	No existe	-1
Cosecante	No existe	2	√2	2√3/3	1	No existe

¿Sabes cuál es la mejor parte? ¡Ni siquiera te tienes que aprender todos! ¿Te das cuenta que seno y cosecante son inversos multiplicativos, del mismo modo que lo son coseno y secante, o tangente y cotangente? Eso reduce a la mitad el trabajo. Además, ¿te das cuenta que $\sin 30° = \cos 60°$? De hecho, para todo ángulo α sucede que $\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$. Es decir, el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento. Tendrás tiempo para pensarlo y explicarlo en los pre-ejercicios.

Avanzando un poco más en el tema, te presento una mnemotecnia para estas funciones. Resulta que puedes enlistar de izquierda a derecha los numeradores para que diga Co-Ca-Co-Ca-Hip-Hip. Y luego, para los denominadores, haces lo mismo pero de derecha a izquierda: Hip-Hip-Ca-Co-Ca-Co. Y ya tienes las funciones ordenadas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Para que te quede más claro, te lo resumo en la siguiente tablita:

función	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
simbología	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
numerador	Co	Ca	Co	Ca	Hip	Hip
denominador	Hip	Hip	Ca	Co	Ca	Co
razón	$\frac{Co}{Hip}$	$\frac{Ca}{Hip}$	$\frac{Co}{Ca}$	$\frac{Ca}{Co}$	$\frac{Hip}{Ca}$	$\frac{Hip}{Co}$

Ahora sí son más evidentes los recíprocos, ¿no? Pero eso también vendrá en la sección de pre-ejercicios.

3. Pre-Ejercicios

1. ¿Por qué un triángulo sólo puede tener un ángulo recto?
2. ¿Por qué sucede que $\csc x = \frac{1}{\sin x}$?
3. ¿Por qué sucede que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$?
4. ¿Por qué sucede que $\tan x = \frac{1}{\cot x}$?
5. ¿Por qué sucede que $\sin x = \cos(90 - x)$?
6. ¿Por qué sucede que $\sin x = \sin(180 - x)$?
7. ¿Por qué sucede que $\cos(180 - x) = -\cos x$?
8. ¿Por qué sucede que en el círculo unitario $\sin x$ es directamente la altura del triángulo rectángulo formado?
9. ¿Por qué sucede que en el círculo unitario $\cos x$ es directamente la base del triángulo rectángulo formado?
10. Determina el período (si lo tienen) de las funciones trigonométricas.

4. Identidades trigonométricas

¿Notas cómo un seno se puede transformar en un coseno o cómo una secante puede sustituirse para quedar en términos de coseno? A este tipo de sustituciones se les llama **identidades trigonométricas**. Y hay una tonelada de éstas. Algunas son un poco difíciles de demostrar. Por eso podrás usarlas aquí sin problema. Te lo permito. Las que tengas que demostrar estarán indicadas. En la próxima ocasión sí tendrás que demostrar las demás. Así que te enlisto aquí algunas de las más empleadas (hay unas que de verdad están muy enfermas y groseras).

- **Suma y diferencia de ángulos**
  - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
  - $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
  - $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
- **Producto a suma**
  - $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$
  - $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
  - $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$
  - $\cos\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- **Suma a producto**

- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

- **Identidades Pitagóricas**
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  - $\tan^2 x + 1 = \sec x^2$
  - $\cot^2 x + 1 = \csc x^2$

5. Ejercicios

1. ¿Por qué suceden los valores fundamentales que se encuentran en la tabla?
2. Demuestra las identidades pitagóricas.
3. Demuestra que $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
4. Demuestra que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
5. Utiliza las identidades pitagóricas para encontrar otras dos expresiones para el ejercicio anterior.
6. Demuestra que $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-tan^2 x}$
7. Demuestra las identidades Producto a suma.
8. Demuestra las identidades Suma a producto.
9. Encuentra una expresión para el seno del triple de un ángulo.
10. Considera un triángulo rectángulo cuyos catetos son paralelos a los ejes x e y. Sea a la altura, b su base y c su hipotenusa. Sea α el ángulo opuesto a a. Demuestra que $a = c\sin\alpha$ y que $b = c\cos\alpha$.
11. Demuestra el ejercicio anterior de otra manera.
12. Demuestra de tres formas distintas (una trigonométrica y dos clásicas) que, en un triángulo de 30-60-90, el lado opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa.
13. Demuestra las siguientes identidades:
    a) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$
    b) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$
    c) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
    d) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sinh\beta$
14. Demuestra que $\tan x + \cot x = \sec x\csc x$.
15. Prueba que $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$.

6. Agregados culturales

1. Se le conoce como "mnemotecnia" a alguna técnica particular utilizada para recordar algún dato. Véase el CoCa-CoCa-HipHip anteriormente mencionado.

2. A las identidades de Suma a producto también se les conocen como **Fórmulas de Simpson**.

3. La identidad $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y su homóloga para el coseno, son tremendamente útiles en cálculo para realizar sustituciones trigonométricas.

4. Las identidades del agregado anterior pertenecen a una categoría de identidades llamadas **Reducción de exponentes**. Pero por el momento nos podremos olvidar de ellas porque no se usarán para esta lista.

5. Debido a los hallazgos del ejercicio 12, deberías tener bien presentes dos cosas:

   a) En un un triángulo de 30-60-90, el lado opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa. Siempre.

   b) Si tienes un triángulo rectángulo en el que la proporción de algún cateto con la hipotenusa es $\frac{1}{2}$, es claro que hay un ángulo de 30°.

6. Cosas parecidas se pueden decir respecto a los demás valores fundamentales, pero me pareció muy importante enfatizar esa en particular. Seguro Favela entiende por qué.

7. Los cuyos tienen una asombrosa memoria auditiva, de manera que aprenden a asociar sonidos particulares con situaciones dadas. Por eso piden comida al escuchar el refrigerador.

7. Lista de problemas

1. (**Ley de Senos**) Sean a, b, c los lados de un triángulo y A, B, C los ángulos opuestos a ellos, respectivamente. Sea R el circunradio de este triángulo. Prueba que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2. (**Ley de Cosenos**) Bajo la nomenclatura del problema anterior, prueba que, no importando cómo coloques las letras, sucede que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3. (**Ley de Tangentes)** Bajo la nomenclatura de los dos problemas anteriores, prueba que, no importando cómo coloques las letras, sucede que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

4. (**Teorema de la Bisectriz**) En un $\triangle ABC$, la bisectriz del ángulo en A toca a BC en D. Prueba que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

5. (**Teorema de la Bisectriz Generalizada**) En un $\triangle ABC$, sea D un punto sobre BC tal que $\angle BAD = \alpha$ y que $\angle CAD = \beta$. Prueba que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

6. Considerando las condiciones del problema 4, demuestra que:

$$AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

7. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y AD la bisectriz del $\angle A$. Sea E el pie de la perpendicular a AD desde C. Demuestra que $AE = \frac{AC+AB}{2} \Leftrightarrow AD = AB$.

8. Sea ABC un triángulo con $AB = BC$ y $\angle CBA = 30^\circ$, y sean D el pie de altura desde A y M el punto medio de BC. Llamamos P al pie de la perpendicular desde M hacia la paralela a BC por A. El segmento MP cruza a la altura desde B hacia AC en R. Encuentra el valor de $\frac{RB}{RP}$.

9. En el $\triangle ABC$, la altura y la mediana desde C dividen al $\angle C$ en tres ángulos iguales. Encuentre los ángulos del triángulo.

10. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de Γ_2 es el triple del radio de Γ_1. Sea ℓ una recta que es tangente a Γ_1 en P y tangente a Γ_2 en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en Γ_2 tal que TQ es diámetro de Γ_2 y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST. Demuestra que $QR = RT$.

11. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Si la altura BH se corta en Q con la bisectriz interior AD, demuestra que:
$$\frac{QA}{QD} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{b+c}{c}$$

12. En $\triangle ABC$, la altura, la bisectriz y la mediana desde C dividen a $\angle C$ en cuatro ángulos iguales. Encuentre los ángulos del triángulo.

13. Sean ABC y DEF dos triángulos con $AB = DE$, $\angle BAC = \angle EDF = 60^\circ$ y $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$. Muestra que:
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{DF}$$

14. Encuentre (sin uso de calculadora o semejantes) el valor de $\sin 18^\circ$.

15. (**El reto de la lista, para valientes**) Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, ℓ_1 la recta paralela a BC que pasa por A y ℓ_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta CD corta a ℓ_1 y ℓ_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a ℓ_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a ℓ_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de $\triangle ADE$ y $\triangle BFC$, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.