Entrenamiento Club de OMM GTO: Trigonometría

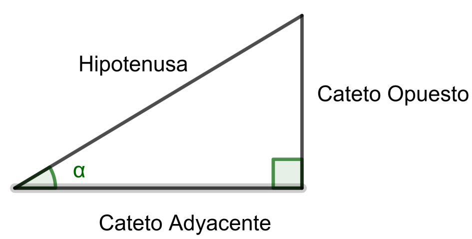
Jesús Rodríguez Viorato

Febrero 2024

1 Conceptos Básicos

1.1 Definición

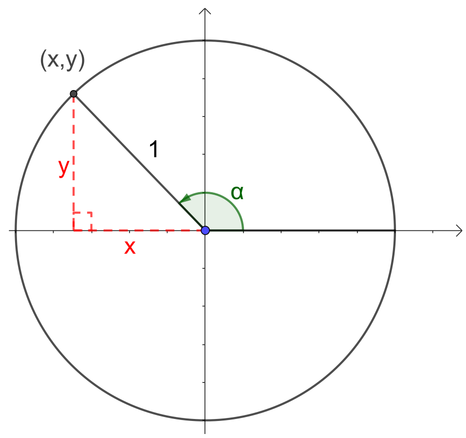
En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo y los nombres de sus catetos respecto al ángulo α.



Funciones trigonométricas:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

El valor de las funciones trigonométricas se define también para valores mayores a 90° e incluso negativos de acuerdo al siguiente círculo:



Funciones trigonométricas con ángulos mayores:

$$\sin(\alpha) = y$$
$$\cos(\alpha) = x$$
$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

1.2 Valores conocidos

Hay valores muy comunmente utilizados y que salen de triángulos conocidos. Un buen ejercicio es convencerse de esos valores, completa los valores faltates:

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\sin(90) = 1$	$\cos(90) = \_\_\_\_\_\_$
$\sin(30) = 1/2$	$\cos(30) = \_\_\_\_\_\_$	$\sin(60) = \sqrt{3}/2$	$\cos(60) = \_\_\_\_\_\_$
$\sin(45) = \sqrt{2}/2$	$\cos(45) = \_\_\_\_\_\_$	$\sin(135) = \_\_\_\_\_\_$	$\cos(225) = \_\_\_\_\_\_$

1.3 Relaciones básicas

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \tag{1}$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{2}$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \tag{3}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{4}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \tag{5}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{6}$$

Como ejercicio, demuestra la relaciones anteriores usando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta)-\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(2\alpha) &= 1-2\sin(\alpha)^2 \\ \sin(2\alpha) &= 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$

1.4 Trigonometría y los triángulos

Hay dos relaciones fundamentales entre los lados de un triángulo y sus ángulos usando. Éstas son las leyes de senos y cosenos.

1.4.1 Ley de Senos

Sean a, b, c los lados de un triángulo con angulos opuestos α, β, γ respectivamente. Sea R el radio del circuncírculo del triángulo en cuestión. Entonces se tiene la realción:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

1.4.2 Ley de Cosenos

Con la misma notación anterior se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

2 Ejercicios de práctica

En esta sección practicarán los conceptos básicos haciendo cálculos

- Si en un triángulo ABC con ángulo recto en B se tiene que el ángulo en A es de $30°$ y el lado $AB = 7$, ¿cuánto miden los otros lados del triángulo?
- En un triángulo ABC se sabe que el ángulo en A mide $120°$ y que los lados AB y AC miden 5 y 4 respectivamente, ¿cuánto mide el lado BC?
- En un triángulo ABC el ángulo en A mide $45°$ y el lado BC mide $10cm$, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?

3 Problemas Teóricos

En esta sección deberás demostrar algunas proposiones famosas que son útiles para demostrar problemas más avanzados.

- (*Área dados lados y ángulo*) Demuestra que en un triángulo ABC con ángulo α en A se tiene que

$$\text{Área de ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

- (*Teorema de la Bisectriz Generalizada*) En un triángulo ABC, sea D un punto sobre BC. Llamemos $\alpha = \angle BAD$ y $\beta = \angle DAC$. Prueba que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB\sin(\alpha)}{AC\sin(\beta)}$$

  Observación: Cuando AD es la bisectriz del ángulo en A, se obtiene el Teorema de la bisectriz.

- (*Área del triángulo dados los tres ángulos y un lado*) Demuestra que en un triángulo ABC se tiene que

$$\text{Área de ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sin(B)\sin(C)}{2\sin(A)}$$

- (*Área del triángulo dados los tres ángulos y el circunradio*) Demuestra que en un triángulo ABC con circunradio R se tiene que

$$\text{Área de ABC} = 2R^2\sin(A)\sin(B)\sin(C)$$

- (*Longitud de la bisectriz*) Sea ABC un triángulo y D sobre BC tal que AD bisecta al ángulo en A. Llamemos α al ángulo $\angle BAD = \angle DAC$, $b = AC$ y $c = AC$. Demuestra que

$$AD = \frac{2bc \cdot \cos(\alpha)}{b + c}$$

4 Problemas de práctica

En esta sección he elegido algunos problemas tipo Olimpiada y que pueden resolverse con trigonometría.

1. Los catetos de un triángulo ABC, rectángulo en A, miden 60 y 80 unidades y su hipotenusa 100. Un punto D en BC es tal que los triángulos ABD y CAD tienen el mismo perímetro. Calcular AD.

2. Sean ABC y DEF dos triángulos con $AB = DE$, $\angle BAC = \angle EDF = 60°$ y $\angle ABC + \angle DEF = 180°$. Muestra que:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{DF}$$

3. Un triángulo de lados a, b y c tiene el ángulo opuesto al lado c igual al doble del opuesto a a. Demuestra que

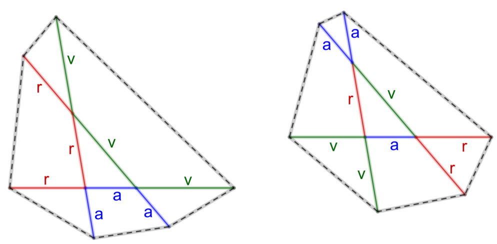
$$c^2 = a(a + b)$$

.

4. Calcular el área de un triángulo ABC sabiendo que su ángulo en A es de 45 grados y, si el pie de la altura de A es D, $BD = 3$ y $DC = 2$.

5. (*II CFOMM*) Se tienen nueve palitos de madera: tres azules de longitud a cada uno, tres rojos de longitud r cada uno y tres verdes de longitud v cada uno, tales que es posible formar un triángulo T con palitos de colores distintos.

   Dana puede formar dos arreglos, comenzando con T y utilizando los otros seis palitos para prolongar los lados de T, como se muestra en la figura. De esta manera se pueden formar dos hexágonos cuyos vértices son los extremos de dichos seis palitos. Demuestra que ambos hexágonos tienen la misma área.



   Nota. La figura de arriba sólo muestra las configuraciones que forma Dana, no el tamaño exacto de los palitos. Se podrían formar más arreglos distintos con los palitos, pero sólo consideramos los dos que se muestran en la figura.

6. (XXVI OMM)Sean C_1 una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y l la recta tangente a C_1 en P. Considera un punto Q sobre l, distinto de P, y sea C_2 la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a C_1 en S y la recta PS intersecta a C_2 en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de C_1 y C_2, respectivamente. Muestra que $PS/SR = r_1/r_2$.

7. (I OIM) Sea P un punto interior al triángulo equilátero ABC tal que:

$$PA = 5, PB = 7, PC = 8$$

   Encontrar la longitud del lado del triángulo ABC.