XXVI OMMBC 2014: Rumbo al Nacional

Trigonometría (*Entrenamiento*)

17/11/2014

La idea detrás del presente entrenamiento, es que se aprendan a utilizar una herramienta muy poderosa, y muchas veces, poco valorada. Aunque no sea evidente, la trigonometría sirve para resolver problemas de álgebra.

Para el presente entrenamiento, suponemos que el lector tiene conocimiento de la relación que se encuentra entre las funciones trigonométricas y un triángulo rectángulo; así como el lector debe estar familiarizado con la gráfica de las funciones sin, cos, tan, cot, sec y csc, desigualdad de Jensen y Cauchy-Schwarz, Ley de Senos y Ley de Cosenos. A su vez, suponemos que el lector conoce de corazón las siguientes identidades trigonométricas simples. Si acaso el lector no conoce alguna de las identidades, puede demostrarla usando construcciones con triángulos rectángulos, pitágoras, un círculo unitario, o en el caso del Teorema de De Moivre, inducción.

Para que el lector no se sienta agobiado, note que esas 36 identidades pueden ser reducidas a 5 identidades y las gráficas de las funciones sin, cos, tan .

1. **Identidades pitagóricas**

   Aquí solo se necesita saber pitágoras para poder dedicirlas.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \tag{2}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \tag{3}$$

2. **Suma y la diferencia de dos ángulos**

   Estas son las más importantes que vamos a encontrar. De estas tres, se desprenden todas las demás.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \tag{4}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{5}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{6}$$

3. **Ángulos suplementarios**

   Ver la gráfica de dichas funciones.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \tag{7}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \tag{8}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \tag{9}$$

4. **Ángulos complementarios**

   Ídem con el punto anterior.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \tag{11}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \tag{12}$$

5. **Ángulos doble y triple**

   Una pequeña aplicación del punto 2.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{13}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{14}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{15}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\sin\alpha \tag{16}$$

6. **Suma y diferencia de funciones trigonométricas**

   Otra vez, son aplicaciones del punto 2.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{17}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{18}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{19}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{20}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{21}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{22}$$

7. **Multiplicación de funciones trigonométricas**

   Se encuentran con las identidades del punto 2.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \tag{23}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right) \tag{24}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right) \tag{25}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{26}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{27}$$

8. **Expresión de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$ en función de $\tan\frac{\alpha}{2}$**

   Estas sustituciones son útiles principalmente en problemas de álgebra. Se pueden deducir del punto 2.

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{28}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{29}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{30}$$

9. Relación con la función exponencial compleja

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{31}$$

$$e^{i\pi}+1=0 \qquad \text{Ec. de Euler}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \tag{32}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{33}$$

10. Teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{34}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/n} = \cos\frac{\theta+k\cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{\theta+k\cdot 360^\circ}{n}, \qquad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\} \tag{35}$$

Problemas

Warm-up

1. Sean a y b dos números reales no negativos.
   a) Prueba que existe un número real x tal que $\sin x + a\cos x = b$ si y solo si $a^2-b^2+1\geq 0$.
   b) Si $\sin x + a\cos x = b$, expresa $|a\sin x - \cos x|$en términos de a y b.
2. En un triángulo ABC se cumple $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Demuestra
$$\sin 61^\circ + \sin 47^\circ - \sin 25^\circ - \sin 11^\circ = \cos 7^\circ.$$
4. Prueba que
$$\csc\frac{180^\circ}{7} = \csc\frac{360^\circ}{7} + \csc\frac{540^\circ}{7}.$$
5. En el triángulo ABC, $\angle ABC = 45^\circ$. El punto D está en el segmento BC de manera que $2|BD| = |CD|$ y $\angle DAB = 15^\circ$. Encuentra $\angle ACB$.
6. Sea $x_0 = 2003$, y sea $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ para $n\geq 1$. Calcula x_{2004}.
7. Prueba que entre cualesquiera cinco números reales, hay dos, a y b tales que $|ab+1| > |a-b|$.

8. El punto P se encuentra adentro de un triángulo ABC de manera que los ángulos PAB, PBC y PCA son congruentes. Los lados del triángulo tienen longitudes $|AB| = 13$, $|BC| = 14$ y $|CA| = 15$, y la tangente del ángulo PAB es m/n (esto es $\tan(\angle PAB) = m/n$), donde m y n son enteros primos relativos entre sí. Encuentra $m + n$.

9. Sea θ un ángulo con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Entonces
$$\sin\theta < \theta < \tan\theta.$$

10. Sean a y b números reales de manera que
$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos a + \cos b &= \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$
Evalúa $\sin(a+b)$.

Sencillos

1. Sea x un número real tal que $\sec x - \tan x = 2$. Evalúa $\sec x + \tan x$.

2. Sea $0° < \theta < 45°$. Ordena
$$t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, \qquad t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}$$
$$t_2 = (\cot\theta)^{\tan\theta} \qquad t_2 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$$
en orden decreciente.

3. Calcula
   a) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$;
   b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$;
   c) $\cos 36° - \cos 72°$;
   d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$.

4. Simplifica la expresión
$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

5. Prueba que
$$1 - \cot 23° = \frac{2}{1 - \cot 22°}.$$

6. La región $\mathcal{R}$ contiene todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 100$ y $\sin(x+y) \geq 0$. Encuentra el área de la región $\mathcal{R}$.

7. En el triángulo ABC, muestra que
$$\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}.$$

8. En el triángulo ABC,
$$3\sin A + 4\cos B = 6 \qquad \text{y} \qquad 4\sin B + 3\cos A = 1.$$
Encuentra la medida del ángulo C.

9. Prueba que
$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$$
para todas las $a \neq \frac{k\pi}{2}$, cuando $k \in \mathbb{Z}$.

10. Expresa
$$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$
como un monomio.

11. Prueba que
$$\left(4\cos^2 9^\circ - 3\right)\left(4\cos^2 27^\circ - 3\right) = \tan 9^\circ.$$

12. En un triángulo ABC, $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1$. Prueba que
$$\text{mín}\{A+B, B+C, C+A\} < 30^\circ.$$

13. Sea ABC un triángulo. Prueba que

    a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$;

    b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$.

14. Sea ABC un triángulo acutángulo. Prueba que

    a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;

    b) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

15. Sea ABC un triángulo. Prueba que
$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$
Así mismo prueba que si x, y, z son números reales con $xy + yz + zx = 1$, entonces existe un triángulo ABC de manera que $\cot A = x$, $\cot B = y$, $\cot C = z$.

16. Sea ABC un triángulo. Prueba que
$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1.$$
De igual manera, prueba que si x, y, z son reales positivos de manera que
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$
entonces existe un triángulo ABC tal que $x = \sin\frac{A}{2}$, $y = \sin\frac{B}{2}$, $z = \sin\frac{C}{2}$.

17. Sea ABC un triángulo. Prueba que

    a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$;

    b) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$;

    c) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$;

    d) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

    e) $\csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \geq 6$.

18. En un triángulo ABC, muestra que

a) $4R = \frac{abc}{[ABC]}$;

b) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC]$;

c) $2R \sin A \sin B \sin C = r\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)$;

d) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

e) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$.

19. Sea s el semiperímetro del triángulo ABC. Prueba que

    a) $s = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

    b) $s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

20. En un triángulo ABC, muestra que

    a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

    b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

21. Sea ABC un triángulo. Prueba que

    a) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$;

    b) $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

    c) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

    d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$;

    e) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$;

    f) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$;

    g) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

22. Dado que
$$\left(1 + \tan 1^\circ\right)\left(1 + \tan 2^\circ\right)\cdots\left(1 + \tan 45^\circ\right) = 2^n$$
encuentra n.

23. En el triángulo acutángulo ABC, si D, E y F son los pies de las alturas del triángulo, entonces
$$[DEF] \leq \frac{1}{4}[ABC].$$

24. Muestra que uno puede usar una composiciones de botones trigonométricos en una calculadora, tales como sin, cos, tan, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, para reemplazar el botón de recíproco que se ha roto.

25. Sean a, b, c números reales, todos distintos de -1 y 1, de manera que $a + b + c = abc$. Prueba que
$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}.$$

26. Prueba que un triángulo ABC es isósceles si y solo si
$$a\cos B + b\cos C + c\cos A = \frac{a+b+c}{2}.$$

27. Evalúa
$$\cos a \cos 2a \cos 3a \cdots \cos 999a,$$
donde $a = \frac{2\pi}{1999}$.

28. Prueba que $\cos 1^\circ$ es un número irracional.

29. Encuentra el valor máximo de
$$S = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$$
si $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2$.

30. Sean a, b, c números reales. Prueba que
$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq \left(a^2 + 1\right)\left(b^2 + 1\right)\left(c^2 + 1\right).$$