Material extra: Truquitos de combi

19-25 de Marzo de 2016

Por: Clemente

Resumen

Material extra, material extra para todos! Esta ronda yo la invito. Esta lista expande la combi básica con unas cuantas técnicas e ideas útiles que abriran tu mente a más cosas. Claro que si ya pudiste con la lista pasada, no creo que tengas demasiadas complicaciones no ésta.

1. Teorema del binomio

También conocido como teorema de Newton (ya sabrás por qué), dice lo siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}b^b$$

Te diría una demostración, pero se supone que ya lo demostraste en la lista pasada. Si no, no sé qué haces con ésta.

Y por si no lo sabías, los símbolos del lado derecho de la igualdad se llaman coeficientes binomiales, porque son los coeficientes y están asociados al binomio que fue elevado a la n-ésima potencia.

2. Contar de dos maneras

Esto no es un teorema ni algo así, es vilmente lo que dice: contar de dos maneras. Ésto se utiliza más que nada para probar fórmulas que de un lado tienen muchas cuentitas (sumas, productos, coeficientes binomiales, etc.) y del otro lado, por lo general, algo muy simple. Es recomendable que trates de asociar la fórmula a probar con algún tipo de problema que puedas desarrollar de forma simple.

3. Caminos

Imagínate que tienes una cuadrícula de $n \times m$, te sitúas en la esquina inferior izquierda y tu meta es llega a la esquina superior derecha con la única condición de que sólo te puedes mover hacia la derecha o hacia arriba. ¿Cuántas maneras hay de hacer ésto? La respuesta, mágicamente, es:

$$\binom{n+m}{n}$$

A ti te toca demostrar esto. Ahora, lo útil es que, si puedes representar un problema como si fuera un problema de caminos, te lo simplificarías bastante.

4. Problemas

1. Encuentra dos demostraciones distintas para

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

.

2. Encuentra una nueva demostración para:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

3. Demuestra de dos maneras distintas que

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

4. Encuentra el término que no contiene x en el desarrollo de

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$$

5. Demuestra que

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

6. Probar que si m, n, r son naturales con $0 \leq r \leq m, n$ entonces

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

7. Demuestra que

$$\binom{n}{3}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n-1}{2}$$

8. Demuestra con caminos que

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$$