Ángulos y líneas paralelas

Entrenamiento #1 para 3ª etapa
05-11 de marzo de 2016
Por: Lulú

Resumen

En este documento podrás encontrar la información necesaria para poder resolver problemas básicos de geometría. Es importante que se tenga un dominio (de nivel básico, no te espantes) del álgebra para poder comprender y manipular esta información de la manera correcta. Si no sabes ni papa de álgebra, por favor, dilo con confianza y buscaremos el modo de apoyarte. También tenemos material de álgebra básico, eh.

Además del material necesario para resolver problemas básicos de geometría, podrás encontrar ejercicios (situaciones rápidas y sencillas para que apliques y comprendas mejor los conceptos) y una lista de problemas. El material incluye los ángulos entre líneas, definiciones con paralelas, ángulos en el triángulo y ángulos en la circunferencia.

1. Un pequeño preámbulo

Antes que nada, para que a los que no son nuevos no se les haga raro, empezaré explicando que a los ángulos se les ponen nombres de letras griegas: alfa (α), beta (β), etc. Me tocó conocer a una participante, en los viejos tiempos, que nombrara a los ángulos de la siguiente manera: carita feliz, arcoiris, corazón.

Lo que quiero decir es que pueden nombrar a los ángulos como lo crean conveniente, así como esta muchacha de la leyenda. Pero el protocolo, la norma o lo típico (ya me acordé: se dice convención) es utilizar letras griegas para denotar ángulos.

2. Propiedades de los ángulos

Los ángulos pueden formarse de muchas maneras distintas. Pueden tocarse dos líneas, puede ser ángulos que se "pasean" entre paralelas, o ángulos referente a las circunferencias. Primero veamos nuestros axiomas más importantes.

2.1. Ángulos en un punto y en la línea

Donde sea que seamos capaces de visualizar un punto, éste tendrá una cantidad de ángulos a su alrededor. Si no vemos ninguno es porque el punto tiene un ángulo completo (definición que se retomará más adelante). En el caso de la Figura 1 hay cuatro ángulos.

¿Qué podemos aprender de aquí? Tal como se ve en el mismo dibujo, se puede trazar un círculo cuyo centro sea nuestro punto. ¿Cuántos grados tiene una circunferencia? 360° Entonces, sabemos que $\boxed{\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°}$, de donde podemos deducir la primera de las propiedades de los ángulos:

Propiedad 1. *La suma de todos los ángulos alrededor de un punto siempre es* 360 *grados.*

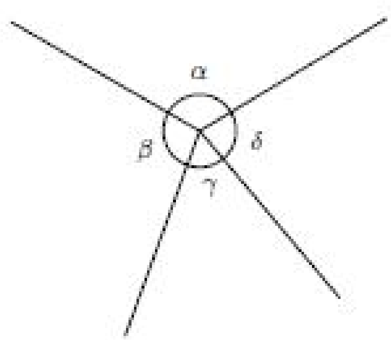


Figura 1: Un punto con cuatro ángulos alrededor de él

Ahora veamos el otro caso, los ángulos sobre la línea. En la Figura 2 vemos que si de una línea salen otras líneas, desde un mismo punto, podemos trazar un semicírculo cuyo centro sea ese punto. En el caso de la Figura 2, se tienen tres ángulos formando dicho semicírculo ¿Y cuántos grados tiene la mitad de un círculo? Así, se ve que $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$, por lo que hemos llegado a la segunda propiedad de los ángulos:

Propiedad 2. *La suma de todos los ángulos sobre una línea siempre es* 180 *grados.*

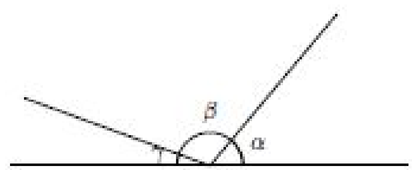


Figura 2: Una línea con tres ángulos sobre ella

Esta última propiedad también significa que una línea representa una apertura de un ángulo de 180°. Es un detalle que podría ser importante para explicar la siguiente propiedad. Como puede verse en la Figura 3 $\alpha + \beta = 180$ para una línea (por la propiedad 2), pero para la otra línea se sabe que $\beta + \alpha\prime = 180$.

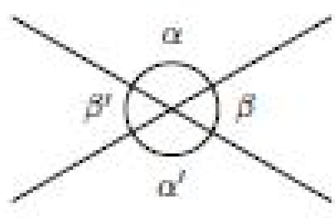


Figura 3: Dos líneas cruzándose

Entonces, la única deducción lógica es que $\boxed{\alpha = \alpha\prime}$. Bajo el mismo razonamiento es fácil probar que también $\boxed{\beta = \beta\prime}$. Bajo estas circunstancias, a α y $\alpha\prime$, como pareja, se les denomina **opuestos por el vértice**. Del mismo modo, β y $\beta\prime$ también son opuestos por el vértice; uno respecto al otro. Con ello, hemos llegado a la siguiente propiedad:

Propiedad 3. *Dos ángulos que son opuestos por el vértice son iguales entre sí.*

2.2. Las líneas paralelas

Las líneas paralelas también tienen ciertas propiedades en cuestión de los ángulos. Es importante recordar también que funciona a la inversa; es decir, si encontramos que alguna de estas propiedades se cumple, entonces podemos garantizar que hay líneas paralelas. ¡Qué emoción!, ¿no?

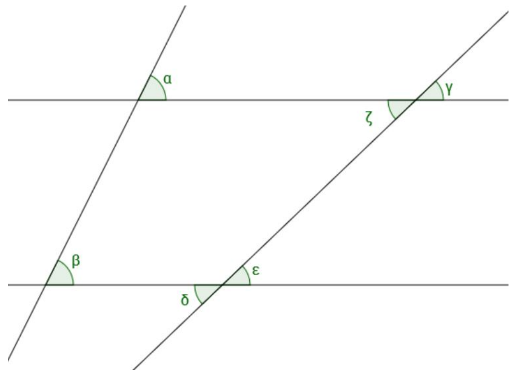


Figura 4: Ángulos entre paralelas

Hay tres tipos de ángulos que se pueden formar con líneas paralelas. Por ejemplo, en la Figura 4 ocurre que $\boxed{\alpha = \beta, \gamma = \varepsilon, \delta = \zeta}$. En este caso, cada uno de esas parejas se llaman **correspondientes**.

Propiedad 1. *Los valores de dos ángulos que son correspondientes son iguales entre sí.*

Dado que $\varepsilon = \gamma$ por ser correspondientes y que $\gamma = \zeta$ por ser opuestos por el vértice, se deduce que $\boxed{\varepsilon = \zeta}$. A esta pareja se le llama **alternos internos**.

Propiedad 2. *Los valores de dos ángulos que son alternos internos son iguales entre sí.*

Por otra parte, como $\delta = \zeta$ y $\zeta = \gamma$, podemos concluir que $\boxed{\delta = \gamma}$. Estos dos amigos son **alternos externos**.

Propiedad 3. *Una pareja de ángulos que sean alternos externos serán almas gemelas para toda la vida (entiéndase que tendrán valores iguales entre sí).*

2.3. En un triángulo

Uno de los primeros ejercicios que se me ocurrió dejarles es demostrar la primera propiedad de los triángulos utilizando lo que hasta ahora les he enseñado. Si quieren podemos hacerlo todos juntos en el pintarrón. Podríamos hasta utilizar un dibujo como de la Figura 5.

Propiedad 1. *La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre da un total de* $180°$. *En el caso del dibujo significa que* $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$.

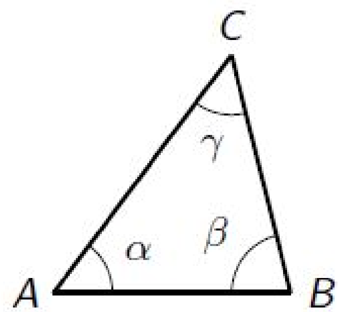


Figura 5: Ángulos internos de un triángulo

El segundo de los ejercicios que me parece prudente intentar es la demostración de la siguiente propiedad, que tiene que ver con los ángulos externos. Para visualizarlo mejor, podemos basarnos en la Figura 6.

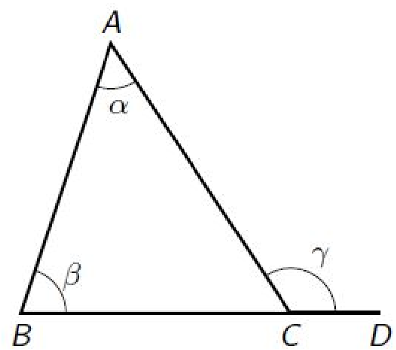


Figura 6: γ como ángulo externo de $\triangle ABC$

Propiedad 2. *Un ángulo externo en un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos internos. En el caso de nuestro dibujo, eso significa que* $\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$.

Las últimas dos propiedades las recitaré aquí y no serán ejercicios que se tengan que demostrar. Estas propiedades corresponden a las Figuras 7a y 7b.

Propiedad 3. *En un triángulo isósceles, los ángulos que son opuestos a los lados iguales, son iguales entre sí. En el caso del dibujo, significa que* $\boxed{\angle CAB = \angle ABC}$

Propiedad 4. *En un triángulo equilátero, todos los ángulos son iguales a* 60°.

(a) (b)

Figura 7: Triángulo isósceles con pareja marcada (izquierda) y un equilátero (derecha)

2.4. En la circunferencia

Antes de empezar a decir las propiedades, considero importante hacer todas las definiciones de los conceptos que se manejan respecto a las circunferencias. Empecemos por las líneas:

1. Un **radio** es una línea que va del centro del círculo hacia cualquier punto de la circunferencia.
2. Un **diámetro** es una línea que va de un punto de la circunferencia a otro, pero pasando por el centro. Tiene una longitud de dos radios.
3. Una **cuerda** es una recta que va de un punto de la circunferencia a otro.
4. Una **tangente** es una línea que toca a la circunferencia en sólo un punto.
5. Una **secante** es una línea que atraviesa el círculo y lo corta en dos partes. Se puede decir que es una cuerda extendida.

Debido a las distintas interacciones entre estas líneas, la circunferencia también genera distintos ángulos. Éstos son los siguientes:

1. Un **ángulo central** está formado por dos radios.

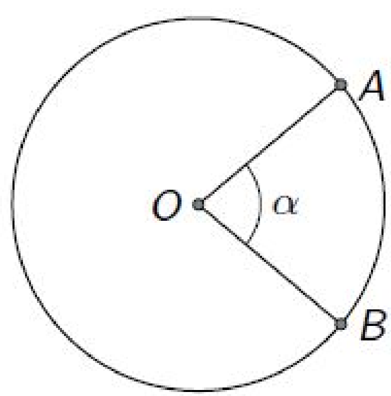


Figura 8: Ángulo central

2. Un **ángulo inscrito** se forma por dos cuerdas que salen de un mismo punto de la circunferencia.

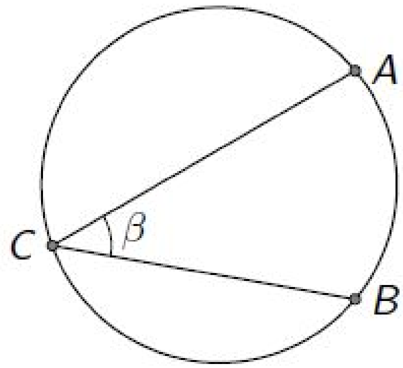


Figura 9: Ángulo inscrito

3. El **ángulo semi-inscrito** se forma por una tangente y una cuerda, con la intersección en el punto de tangencia.

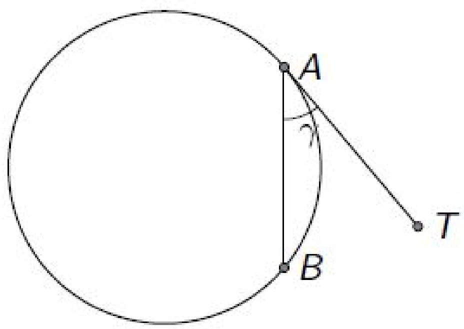


Figura 10: Ángulo semi-inscrito

4. El **ángulo interior** se genera por el cruce de dos cuerdas dentro de la circunferencia.

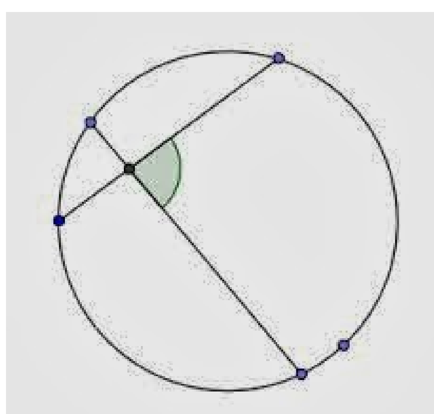


Figura 11: Ángulo interior

5. El **ángulo exterior** se genera por dos secantes que se intersecan en el exterior de la circunferencia.

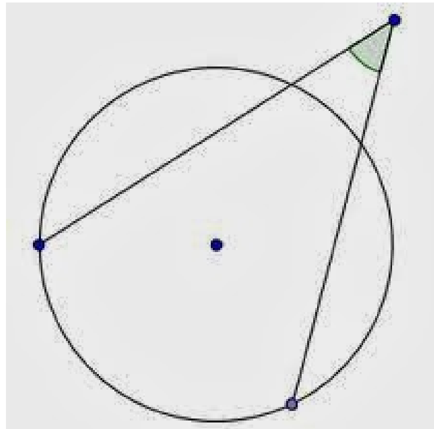


Figura 12: Ángulo exterior

Una vez que hemos prescindido de todas esta formalidades y definiciones, podemos proceder a las propiedades.

Propiedad 1. *La medida del ángulo central es igual al arco que abarca.*

Esta primera propiedad será la única que habremos de creer ciegamente. Las siguientes propiedades son fácilmente demostrables y las realizaremos como más ejercicios en los que podemos (idealmente) aplicar los conocimientos adquiridos con los otros tipos de ángulos.

Propiedad 2. *La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que abarca.*

Propiedad 3. *La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco que abarca.*

Propiedad 4. *La medida del ángulo interior es igual a la mitad de la suma de los dos arcos que abarca.*

Propiedad 5. *La medida del ángulo exterior es igual a la mitad de la diferencia de los dos arcos que abarca.*

2.5. Agregados culturales

1. Los ángulos reciben nombres distintos dependiendo de su medida:
   a) **Agudo** si es menor que $90°$
   b) **Recto** si es igual a $90°$
   c) **Obtuso** si es mayor que $90°$ pero menor que $180°$
   d) **Llano** si es igual a $180°$
   e) **Cóncavo** si es mayor que $180°$ pero menor que $360°$
   f) **Completo** si es igual a $360°$
2. Cuando se escribe $\angle ABC$ se lee "ángulo ABC" , y denota al ángulo formado por los puntos A, B y C. De manera que empieza en A, pasa por (o gira en) B y va hacia C.
3. En el agregado anterior se utilizó la palabra "denota", que es una conjugación del verbo denotar, la cual es sinónimo de significar.

4. A una pareja de ángulos que suma un ángulo recto se les llama **complementarios**.
5. A una pareja de ángulos que suma un ángulo llano se les llama **suplementarios**.

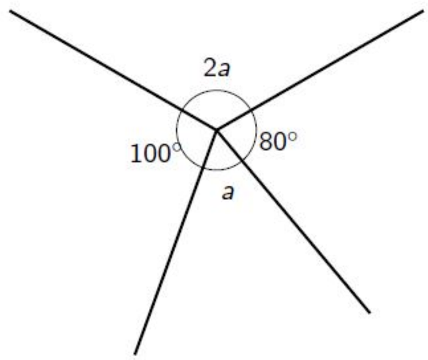
(a) (b)

Figura 13: Ángulos complementarios (izquierda) y ángulos suplementarios (derecha)

6. Hay dos formas de clasificar a los triángulos: por sus lados o por sus ángulos.
7. Por sus ángulos un triángulo puede ser:
   a) **Acutángulo** si todos sus ángulos son agudos.
   b) **Rectángulo** si tiene un ángulo recto.
   c) **Obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso.
8. Por sus lados un triángulo puede ser:
   a) **Escaleno** si todos sus lados (por ende sus ángulos) son distintos.
   b) **Isósceles** si hay una pareja de lados iguales. Este tipo de triángulos también tiene un pareja de ángulos iguales.
   c) **Equilátero** si todos sus lados (por ende sus ángulos) son iguales.
9. Contrario a la creencia popular, el área de una figura no se mide en grados, sino en unidades cuadradas.
10. El número de vacas en la India es mayor al número de personas en los Estados Unidos.

3. Ejercicios

1. Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ de tal forma que la diagonal BD queda fuera de la figura. Se traza la diagonal AC. Se sabe que el ángulo $\angle CAB = 30°$, que $\angle ABC = 40°$, que $\angle DCB = 120°$, y se sabe que $CD = AC$. Encuentra el valor de todos los demás ángulos ($\angle BCA$, $\angle ACD$, $\angle CDA$ y $\angle DAC$).
2. En $\triangle ABC$, se tiene que $\angle A = 50°$ y $\angle B = 30°$. Encuentra cuánto vale $\angle C$
3. En un triángulo XYZ, se sabe que $\angle XYZ = 80°$ y $\angle YZX = 70\circ$. ¿Es $\triangle XYZ$ acutángulo, rectángulo u obtusángulo?
4. En la siguiente figura, ¿cuánto vale el ángulo a?



5. En un triángulo isósceles, en ángulo entre los lados iguales mide $80°$. ¿Cuánto valen los otros dos ángulos?

6. Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\angle C$, y $\angle A = 30°$:

   a) ¿Cuánto vale $\angle B$?

   b) **Nota:** Este triángulo es muy importante. ¿Cuánto vale el lado opuesto al ángulo de $30°$, sabiendo que la hipotenusa mide 2?

7. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo?

8. En $\triangle ABC$, se sabe que $\angle ABC = 2\angle BCA$ y que $\angle CAB = 3\angle BCA$.

   a) ¿Cuánto vale cada ángulo de $\triangle ABC$?

   b) ¿Cuál es el lado más grande del triángulo?

9. Desde un punto se han trazado 5 semi-rectas, de tal manera que entre cualesquiera 2 adyacentes se encuentra el mismo ángulo α. ¿Cuánto vale α?

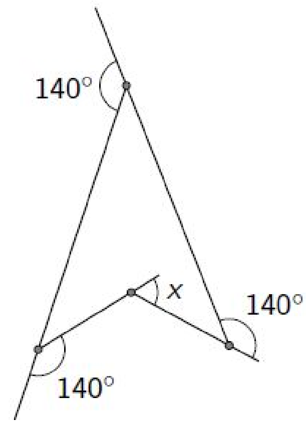
10. El lado AB de un triángulo equilátero ABC se prolongó por B. Sobre esa prolongación, se toma un punto D de manera que $BD = BC$. Encuentra cuánto valen los ángulos internos de $\triangle BDC$.

4. Lista de problemas

1. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono convexo de n lados?

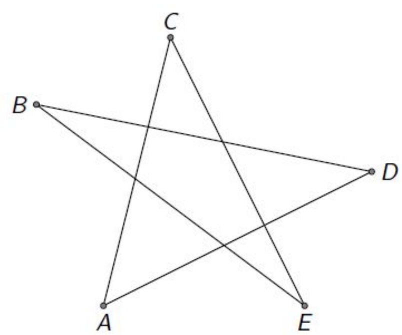
2. ¿Cuál es la medida del ángulo interior en un polígono regular de n lados?

3. Encuentra cuánto vale x en la siguiente figura:

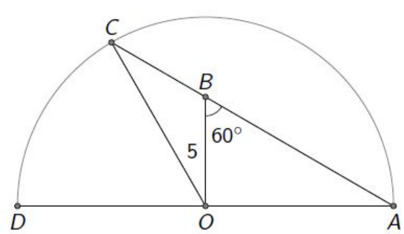


4. Demuestra que en un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes y dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

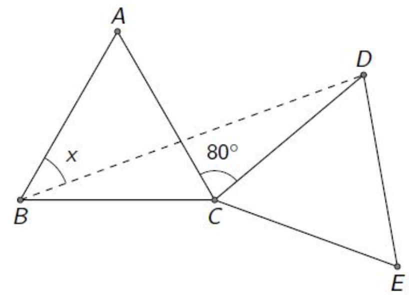
5. Calcula la suma de los ángulos internos en los vértices A, B, C, D y E.



6. En un círculo con centro O, AD es un diámetro, AC es una cuerda (que pasa por B), $BO = 5$ y $\angle ABO = \widehat{CD} = 60^\circ$ como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale la longitud de BC?

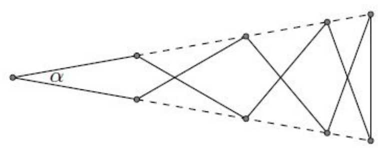


7. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide 80°, ¿cuánto mide el ángulo ABD?

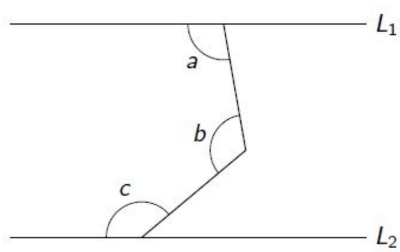


8. En el triángulo ABC, el ángulo en C es recto. Sean E y F puntos en la hipotenusa AB tales que $AE = AC$ y $BF = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo ECF?

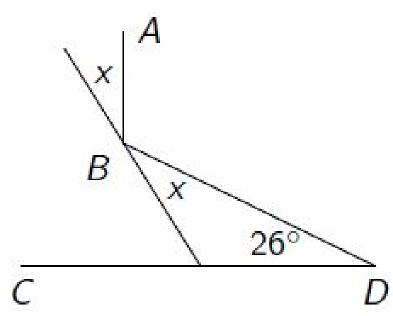
9. Un pantógrafo articulado formado por 9 pedazos está en la siguiente posición. ¿Cuánto vale ángulo α si cada segmento de recta es de la misma longitud?



10. La recta L_1 es paralela a L_2, el ángulo $\angle a = 100^\circ$ y el ángulo $\angle b = 120^\circ$- ¿Cuánto mide el $\angle c$?



11. Si el segmento AB es perpendicular a CD, ¿cuánto mide el ángulo x?



12. En el triángulo CAT, $\angle ACT = \angle ATC$ y $\angle CAT = 36°$. Si R es un punto sobre $\overline{CA}$ tal que $\overline{TR}$ biseca al $\angle ATC$, encuentra cuánto vale $\angle CRT$.

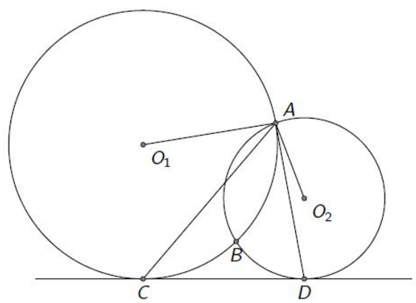
13. Los triángulos ABC y ADC son isósceles con $AB = BC$ y $AD = DC$. El punto D está en el interior del triángulo ABC, el ángulo $\angle ABC = 60°$, y el ángulo $\angle ADC = 140°$. Encuentra cuánto vale $\angle BAD$.

14. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Se traza una recta l que corta a C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de l. Demuestra que $\angle CAN + \angle MBD = 180°$.

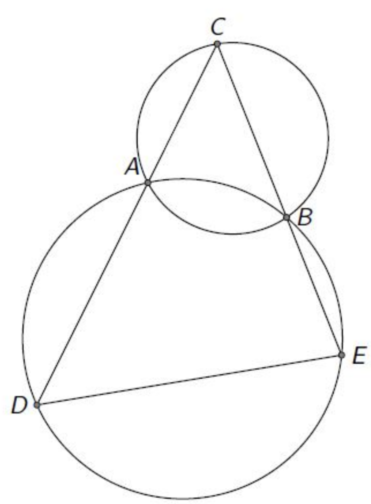
15. Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\angle BAC = 90°$.

16. Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersecan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle O_1AO_2$$



17. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B como se muestra en la figura. Se escoge un punto arbitrario C en la primer circunferencia y se trazan los rayos CA y CB, los cuales intersecan la segunda circunferencia de nuevo en los puntos D y E, respectivamente. Demuestra que la longitud del segmento DE no depende de la elección del punto C.



5. Problemas más jarcors

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que las líneas AB y DC se intersecan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersecan en un punto P. Demuestra que las bisectrices de los ángulos $\angle DPC$ y $\angle AQD$ son perpendiculares.

2. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Una recta por A corta al circuncírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D, respectivamente. Muestra que los circuncírculos de los triángulos DCE y BDE son tangentes a los lados AC y AB, respectivamente.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, una circunferencia ς_1 que pasa por A y D corta a la recta AB en E y otra circunferencia ς_2 que pasa por C y por D corta a la recta BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de ς_1 y ς_2. Muestra que E, F y G son colineales.

4. Una recta que pasa por un punto K en el interior de un cuadrado $ABCD$, interseca a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q, respectivamente. Se dibujan dos circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos KBP y KDQ, respectivamente. Prueba que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias está sobre la diagonal BD.